

β) Πρέπει $\beta\delta - \beta\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \beta(\delta - \gamma) \neq 0 \Leftrightarrow$

$(\beta \neq 0 \text{ και } \delta \neq \gamma)$, που ισχύει. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma} = \frac{3\beta \cdot \gamma + \beta\gamma}{\beta \cdot 5\gamma - \beta\gamma} = \\ &= \frac{3\beta\gamma + \beta\gamma}{5\beta\gamma - \beta\gamma} = \frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma} = 1. \end{aligned}$$

■ ΘΕΜΑ 2_1080

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}. \quad (\text{Μονάδες 13})$$

Λύση

$$\alpha) \frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2 \Leftrightarrow 4x + 5y = -2(x - 4y) \Leftrightarrow$$

$$4x + 5y = -2x + 8y \Leftrightarrow 3y = 6x \Leftrightarrow y = 2x$$

$$\begin{aligned} \beta) A &= \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy} \stackrel{y=2x}{=} \frac{2x^2 + 3(2x)^2 + x(2x)}{x(2x)} = \\ &= \frac{2x^2 + 12x^2 + 2x^2}{2x^2} = \frac{16x^2}{2x^2} = 8 \end{aligned}$$

■ ΘΕΜΑ 2_3874

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί a, β με $a \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{a^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{a}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί a και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{a^{22} \cdot (\beta^3)^8}{a^{-2} \cdot (a\beta)^{25}} \quad (\text{Μονάδες 12})$$

Λύση

$$\alpha) \frac{a^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{a}{\beta} \Leftrightarrow a^2\beta + \beta = a\beta^2 + a \Leftrightarrow a^2\beta - a\beta^2 =$$

$$= a - \beta \Leftrightarrow a\beta(a - \beta) = a - \beta \Leftrightarrow$$

$$a\beta = \frac{a - \beta}{a - \beta} \Leftrightarrow a\beta = 1, \text{ άρα οι αριθμοί } a, \beta \text{ είναι αντίστροφοι.}$$

$$\begin{aligned} \beta) K &= \frac{a^{22} \cdot (\beta^3)^8}{a^{-2} \cdot (a\beta)^{25}} = \frac{a^{22} \cdot \beta^{24}}{a^{-2} \cdot a^{25} \cdot \beta^{25}} = \frac{a^{22} \cdot \beta^{24}}{a^{23} \cdot \beta^{25}} = \\ &= \frac{a^{22}}{a^{23}} \cdot \frac{\beta^{24}}{\beta^{25}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a\beta} = 1 \end{aligned}$$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2α ΘΕΜΑΤΑ

■ ΘΕΜΑ 2_486

Αν $0 < a < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $a^3 < a$, (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, a^3, 1, a, \frac{1}{a} \quad (\text{Μονάδες 12})$$

Λύση

$$\alpha) a^3 < a \Leftrightarrow a^3 - a < 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$a(a-1)(a+1) < 0. \text{ Από τη σχέση } 0 < a < 1$$

έχουμε $0 < a$ και $0 < a \stackrel{0 < 1}{\Rightarrow} 1 < a+1 \Rightarrow 0 < a+1$ και $a < 1 \Rightarrow a-1 < 0$. Από τον κανόνα προσημών του πολλαπλασιασμού προκύπτει $a(a-1)(a+1) < 0$.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε $a^3 < a$. Επίσης,

$$0 < a \Rightarrow 0 < a^3 \text{ και } 0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1.$$

Άρα οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής:

$$0 < a^3 < a < 1 < \frac{1}{a}.$$

ΘΕΜΑ 2_487

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0. \quad (\text{Μονάδες } 13)$$

Λύση

$$\alpha) (x-1)^2 + (y+3)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

$$\beta) x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1=0 \text{ και } y+3=0) \Leftrightarrow (x=1 \text{ και } y=-3)$$

ΘΕΜΑ 2_506

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ (Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

Λύση

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 3 \leq x + y \leq 5$$

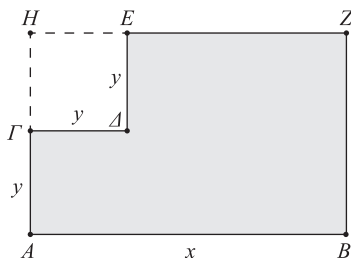
$$\beta) \left. \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot 2 \\ (-3) \end{array}} \left. \begin{array}{l} 4 \leq 2x \leq 6 \\ -6 \leq -3y \leq -3 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} -2 \leq 2x - 3y \leq 3$$

$$\gamma) \left. \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{1, y, 2 > 0} \left. \begin{array}{l} 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{(\cdot)} 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3$$

ΘΕΜΑ 2_1092

Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma Δ Ε Η$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBA\Gamma Δ$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) Από το σχήμα έχουμε $EZ = x - y$ και $ZB = 2y$, άρα η περίμετρος είναι

$$\Pi = AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A = x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y.$$

β) Από τις ανισοτικές σχέσεις που δίνονται έχουμε

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 < 2x < 2 \cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \quad (1)$$

$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 < 4y < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και έχουμε $10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$.

ΘΕΜΑ 2_1541

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Το ορθογώνιο με διαστάσεις x και y έχει περίμετρο $\Pi = 2x + 2y = 2(x + y)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις της υπόθεσης και έχουμε

$$4 + 2 \leq x + y \leq 7 + 3 \Leftrightarrow 6 \leq x + y \leq 10 \stackrel{-2}{\Leftrightarrow}$$

$$2 \cdot 6 \leq 2(x + y) \leq 2 \cdot 10 \Leftrightarrow 12 \leq P \leq 20.$$

β) Το νέο ορθογώνιο έχει διαστάσεις $x - 1$ και $3y$ και θα έχει νέα περίμετρο

$$P' = 2(x - 1) + 2(3y) = 2x - 2 + 6y = 2x + 6y - 2.$$

Έχουμε

$$4 \leq x \leq 7 \stackrel{-2}{\Leftrightarrow} 2 \cdot 4 \leq 2x \leq 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1)$$

$$2 \leq y \leq 3 \stackrel{\cdot 6}{\Leftrightarrow} 6 \cdot 2 \leq 6y \leq 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18 \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και έχουμε

$$8 + 12 \leq 2x + 6y \leq 14 + 18 \Leftrightarrow 20 \leq 2x + 6y \leq 32 \stackrel{-2}{\Leftrightarrow}$$

$$20 - 2 \leq 2x + 6y - 2 \leq 32 - 2 \Leftrightarrow 18 \leq P' \leq 30.$$

■ ΘΕΜΑ 2_3852

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) $-4 \leq \beta \leq -3 \stackrel{(-2)}{\Leftrightarrow} 8 \geq -2\beta \geq 6 \Leftrightarrow 6 \leq -2\beta \leq 8$

Έχουμε $\left. \begin{array}{l} 2 \leq \alpha \leq 4 \\ 6 \leq -2\beta \leq 8 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12.$

β) $\left. \begin{array}{l} 2 \leq \alpha \leq 4 \\ 8 \leq \alpha - 2\beta \leq 12 \end{array} \right\} \stackrel{\text{όλοι οι όροι θετικοί}}{\underset{(-)}{\Rightarrow}}$

$$2 \cdot 8 \leq \alpha(\alpha - 2\beta) \leq 4 \cdot 12 \Rightarrow 16 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta \leq 48$$

■ ΘΕΜΑ 2_3870

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \text{ και } A = 2\alpha(3 - \beta), \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι:

$$K - A = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq A$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = A$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) $K - A = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) =$

$$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$

$$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$

$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) $K - A = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$, ως άθροισμα μη αρνητικών όρων, άρα $K \geq A$.

γ) $K = A \Leftrightarrow K - A = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 3 \end{cases}.$$

■ ΘΕΜΑ 2_4299

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) Ισχύει $3 \leq x \leq 5 \stackrel{(-1)}{\Leftrightarrow} -3 \geq -x \geq -5 \Leftrightarrow -5 \leq -x \leq -3$

$$\left. \begin{array}{l} -2 \leq y \leq -1 \\ -5 \leq -x \leq -3 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} -7 \leq y - x \leq -4$$

β) Βρίσκουμε τις ακραίες τιμές των x^2 και y^2 :

$$3 \leq x \leq 5 \stackrel{3, x, 5 > 0}{\Leftrightarrow} 3^2 \leq x^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow 9 \leq x^2 \leq 25 \quad (1)$$

$$-2 \leq y \leq -1 \stackrel{(-1)}{\Leftrightarrow} 2 \geq -y \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -y \leq 2 \stackrel{1, -y, 2 > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$1^2 \leq (-y)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow 1 \leq y^2 \leq 4 \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9 \leq x^2 \leq 25 \\ 1 \leq y^2 \leq 4 \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 10 \leq x^2 + y^2 \leq 29$$

■ ΘΕΜΑ 2_7519

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha \frac{4}{\alpha} \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$, που ισχύει.

β) Η σχέση $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (1) ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

Άρα ισχύει και αν όπου α βάλουμε το $\beta > 0$,

οπότε $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$ (2). Πολλαπλασιάζοντας κατά

μέλη τις (1) και (2) (όλοι οι όροι είναι θετικοί),

παίρνουμε $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

■ ΘΕΜΑ 2_504

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\alpha\right| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha^2 + 1 + 2\alpha}{\alpha} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

β) $\left|\alpha\right| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow -\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$,

που ισχύει από το (α).

■ ΘΕΜΑ 2_509

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι:

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{|\alpha|^2}{|\alpha||\beta|} + \frac{|\beta|^2}{|\alpha||\beta|} - \frac{2|\alpha||\beta|}{|\alpha||\beta|} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2}{|\alpha||\beta|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(|\alpha| - |\beta|)^2}{|\alpha||\beta|} \geq 0$,

που ισχύει.

β) Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η ισότητα

ισχύει για $\frac{(|\alpha| - |\beta|)^2}{|\alpha||\beta|} = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow$

$|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$.

Άρα η ισότητα ισχύει όταν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι ίσοι ή αντίθετοι.

■ ΘΕΜΑ 2_996

Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| + |y - 3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$ (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$ (Μονάδες 13)

Λύση

α) $1 < x \Leftrightarrow 0 < x - 1 \Leftrightarrow |x - 1| = x - 1$ και

$$y < 3 \Leftrightarrow y - 3 < 0 \Leftrightarrow |y - 3| = 3 - y.$$

Άρα $A = x - 1 + 3 - y = x - y + 2$.

β) $\left. \begin{array}{l} 1 < x < 4 \\ 2 < y < 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 < x < 4 \\ -3 < -y < -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \\ -2 < x - y < 2 \Rightarrow 0 < x - y + 2 < 4 \Rightarrow 0 < A < 4$

■ ΘΕΜΑ 2_1009

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x - 6| + 2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4 \quad (\text{Μονάδες 13})$$

Λύση

α) i) Αν $x \geq 2$, τότε

$$3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow |3x - 6| = 3x - 6, \text{ άρα}$$

$$A = 3x - 6 + 2 = 3x - 4.$$

ii) Αν $x < 2$, τότε

$$3x < 6 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0 \Leftrightarrow |3x - 6| = -3x + 6, \text{ άρα}$$

$$A = -3x + 6 + 2 = 8 - 3x.$$

β) $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} \stackrel{x \geq 2}{=} \frac{9x^2 - 16}{3x - 6 + 2} = \frac{9x^2 - 16}{3x - 4} =$
 $= \frac{(3x)^2 - 4^2}{3x - 4} = \frac{(3x - 4)(3x + 4)}{3x - 4} = 3x + 4$

■ ΘΕΜΑ 2_1062

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow$
 $-1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x, y ισούται με $E = xy$. Αφού τα x, y παίρνουν θετικές τιμές, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο ανισοτικές σχέσεις και έχουμε:
 $1 \cdot 2 < xy < 3 \cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$.

■ ΘΕΜΑ 2_1074

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

Λύση

α) $|y - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y - 3 < 1 \Leftrightarrow$
 $-1 + 3 < y - 3 + 3 < 1 + 3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x, y ισούται με $\Pi = 2x + 2y = 2(x + y)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισοτικές σχέσεις, έχουμε
 $1 + 2 < x + y < 3 + 4 \Leftrightarrow 3 < x + y < 7 \Leftrightarrow$
 $2 \cdot 3 < 2(x + y) < 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$.

■ ΘΕΜΑ 2_1089

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές, (Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10} \quad (\text{Μονάδες 15})$$

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $5 < x \Leftrightarrow x - 5 > 0$, επομένως $|x - 5| = x - 5$ και $x < 10 \Leftrightarrow x - 10 < 0$, άρα $|x - 10| = -(x - 10) = -x + 10$.

β) Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα (α), η παράσταση γράφεται

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10} = \frac{x - 5}{x - 5} - \frac{x - 10}{x - 10} = 1 - 1 = 0.$$

■ΘΕΜΑ 2_1091

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

(Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $1 < x \Leftrightarrow x-1 > 0$,

οπότε $|x-1| = x-1$ και $x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$, άρα

$|x-2| = -(x-2)$. Επομένως η παράσταση γράφεται

$$A = |x-1| - |x-2| = x-1 + x-2 = 2x-3.$$

β) Για $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0$ θα έχουμε και

$x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0$, επομένως

$|x-1| = -(x-1)$ και $|x-2| = -(x-2)$. Άρα

$$A = |x-1| - |x-2| = -(x-1) + x-2 =$$

$$= -x+1+x-2 = -1.$$

■ΘΕΜΑ 2_1273

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογώνιου με διαστάσεις $2x$ και y .

(Μονάδες 13)

Λύση

$$\alpha) |x-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x-3 \leq 2 \stackrel{+3}{\Leftrightarrow} -2+3 \leq x-3+3 \leq 2+3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \text{ και}$$

$$-2+3 \leq x-3+3 \leq 2+3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \text{ και}$$

$$|y-6| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq y-6 \leq 4 \stackrel{+6}{\Leftrightarrow} -4+6 \leq y-6+6 \leq 4+6 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10.$$

$$-4+6 \leq y-6+6 \leq 4+6 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 10.$$

β) Το ορθογώνιο με διαστάσεις $2x$ και y έχει

$$\text{περίμετρο } \Pi = 2(2x+y) = 4x+2y.$$

Από το ερώτημα (α) έχουμε

$$1 \leq x \leq 5 \stackrel{4}{\Leftrightarrow} 4 \cdot 1 \leq 4x \leq 4 \cdot 5 \Leftrightarrow 4 \leq 4x \leq 20 \quad (1) \text{ και}$$

$$2 \leq y \leq 10 \stackrel{2}{\Leftrightarrow} 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 2 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$4 \leq 2y \leq 20 \quad (2). \text{ Προσθέτουμε κατά μέλη τις}$$

σχέσεις (1), (2) και έχουμε

$4+4 \leq 4x+2y \leq 20+20 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 40$. Συνεπώς η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογώνιου είναι 8 και η μεγαλύτερη 40.

■ΘΕΜΑ 2_1544

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|. \quad (\text{Μονάδες } 15)$$

Λύση

$$\alpha) x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + \frac{4+1}{5} =$$

$$= x^2 + 4x + 4 + 1 = \underbrace{(x+2)^2}_{(+)} + 1 > 0$$

$$\beta) B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| =$$

$$= \left| \underbrace{x^2 + 4x + 5}_{(+)} \right| - \left| \underbrace{(x+2)^2}_{(+)} \right| =$$

$$= x^2 + 4x + 5 - x^2 - 4x - 4 = 1$$

■ΘΕΜΑ 2_2702

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = |2x-4|$ και $B = |x-3|$, όπου x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$, να αποδείξετε ότι

$$A+B = x-1. \quad (\text{Μονάδες } 16)$$

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $2 \leq x \Leftrightarrow x-2 \geq 0$,

οπότε $|x-2| = x-2$ και $x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0$, άρα

$|x-3| = -(x-3)$. Επομένως έχουμε

$$A+B = 2|x-2| + |x-3| = 2(x-2) - (x-3) =$$

$$= 2x-4-x+3 = x-1.$$

β) $A+B=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3 \notin [2, 3)$, άρα δεν υπάρχει τέτοιος x .

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_2287

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

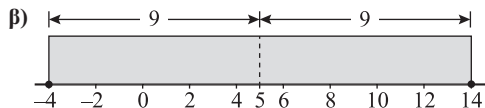
(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό x στον άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο που παριστάνει τον αριθμό 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.



γ) Η σχέση γράφεται $|x-5| \leq 9 \Leftrightarrow -9 \leq x-5 \leq 9 \Leftrightarrow -9+5 \leq x \leq 9+5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 14$.

δ) Από το ερώτημα (γ) έχουμε

$$-4 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x+4 \Leftrightarrow |x+4| = x+4 \text{ και}$$

$$x \leq 14 \Leftrightarrow x-14 \leq 0 \Leftrightarrow |x-14| = -(x-14) = 14-x.$$

$$\text{Άρα } |x+4|+|x-14| = x+4+14-x = 18.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_2301

Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = |x+2|+|x-7| \text{ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)}$$

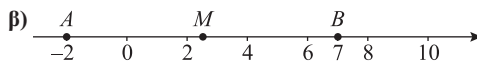
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) i) $|x+2|$ είναι η απόσταση του σημείου M από το σημείο A .

ii) $|x-7|$ είναι η απόσταση του σημείου M από το σημείο B .



Το άθροισμα $|x+2|+|x-7|$ ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων του M από το A και από το B .

γ) Επειδή $-2 < x < 7$, το σημείο M είναι εσωτερικό του τμήματος AB , οπότε το άθροισμα των αποστάσεων του M από το A και από το B ισούται με την απόσταση του A από το B .

$$\text{Άρα } A = |x+2|+|x-7| = 9.$$

δ) Έχουμε $-2 < x \Leftrightarrow 0 < x+2 \Leftrightarrow |x+2| = x+2$ και $x < 7 \Leftrightarrow x-7 < 0 \Leftrightarrow |x-7| = -(x-7) = 7-x$.

$$\text{Άρα } A = |x+2|+|x-7| = x+2+7-x = 9.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_2302

Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5| = |x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

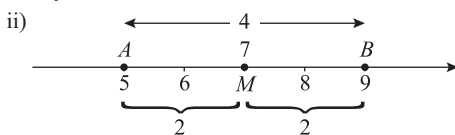
(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Λύση

- α) $|x - 5|$ είναι η απόσταση των σημείων A και M , δηλαδή το μήκος (AM) , και $|x - 9|$ είναι η απόσταση των σημείων B και M , δηλαδή το μήκος (BM) .
- β) i) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$, τότε το σημείο M ισαπέχει από τα A και B , δηλαδή το σημείο M βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB .



Το μέσο M αντιστοιχεί στον αριθμό 7.

Αλγεβρικά λύνουμε την εξίσωση:

$$|x - 5| = |x - 9| \Leftrightarrow$$

$$(x - 5 = x - 9 \text{ ή } x - 5 = -x + 9) \Leftrightarrow$$

$$(0x = -4, \text{ αδύνατη, ή } 2x = 14) \Leftrightarrow x = 7$$

■ ΘΕΜΑ 4_4946

- α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$. (Μονάδες 7)
- β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 3|$. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$. (Μονάδες 5)
- δ) Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $\|x| - 3| \leq 5$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α) $|x - 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x - 3 \leq 5 \Leftrightarrow 3 - 5 \leq x \leq 3 + 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [-2, 8]$



Πρόκειται για τους αριθμούς που παριστάνονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών με σημεία που απέχουν από το 3 απόσταση μικρότερη ή ίση του 5.

- γ) Οι ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 3| \leq 5$ είναι οι $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
- δ) Πρέπει $|x| \in [-2, 8] \Leftrightarrow -2 \leq |x| \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 8 \Leftrightarrow |x| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8 \Leftrightarrow x \in [-8, 8]$.
Οι ακέραιες λύσεις είναι οι $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8$.

■ ΘΕΜΑ 4_7791

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β . (Μονάδες 13)
- β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά. (Μονάδες 12)

Λύση

- α) Αφού το γινόμενο $(\alpha - 1)(1 - \beta)$ είναι θετικό, οι παράγοντες $(\alpha - 1)$ και $(1 - \beta)$ είναι ομόσημοι, δηλαδή ή και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.
- Αν $\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$, τότε $1 - \beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 1$, άρα $\beta < 1 < \alpha$.
 - Αν $\alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$, τότε $1 - \beta < 0 \Leftrightarrow \beta > 1$, άρα $\alpha < 1 < \beta$.
- Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α, β .
- β) Έχουμε ότι $|a - 1|$ είναι η απόσταση του a από το 1, ενώ $|1 - \beta|$ είναι η απόσταση του β από το 1. Άρα η παράσταση $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$ εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του a από το 1 και του β από το 1. Επειδή όμως από το ερώτημα (α) το 1 είναι μεταξύ των α, β , συμπεραίνουμε ότι η παράσταση K εκφράζει την απόσταση του a από το β , δηλαδή $K = |\beta - \alpha| = 4$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_8443

- α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$. (Μονάδες 10)
- β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.
- i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)
- ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (Μονάδες 10)

Λύση

- α) $|x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow -2+4 < x-4+4 < 2+4 \Leftrightarrow 2 < x < 6$, άρα $x \in (2, 6)$.
- β) i) Έχουμε $|x-4| < 2$ και από ερώτημα (α) προκύπτει $2 < x < 6 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 < 3x < 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 6-4 < 3x-4 < 18-4 \Leftrightarrow 2 < 3x-4 < 14$, άρα $3x-4 > 0 \Leftrightarrow |3x-4| = 3x-4$. Τελικά, $2 < |3x-4| < 14$, δηλαδή η απόσταση του $3x$ από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.
- ii) Έχουμε $6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 6-19 < 3x-19 < 18-19 \Leftrightarrow -13 < 3x-19 < -1$, άρα $3x-19 < 0 \Leftrightarrow |3x-19| = 19-3x$. Συνεπώς $1 < 19-3x < 13 \Leftrightarrow 1 < |3x-19| < 13$, δηλαδή η απόσταση του $3x$ από το 19 είναι μεγαλύτερη του 1 και μικρότερη του 13.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_8453

- Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι
- $|a-2| < 1$
 - $|\beta-3| \leq 2$
- α) Να αποδειχθεί ότι $1 < a < 3$. (Μονάδες 4)
- β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2a-3\beta$. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

Λύση

- α) $|a-2| < 1 \Leftrightarrow -1 < a-2 < 1 \Leftrightarrow 2-1 < a-2+2 < 1+2 \Leftrightarrow 1 < a < 3$
- β) $|\beta-3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \beta-3 \leq 2 \Leftrightarrow 3-2 \leq \beta \leq 3+2 \Leftrightarrow 1 \leq \beta \leq 5$, άρα ο β βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 1 και 5.
- γ) $1 < a < 3 \xrightarrow{-2} 2 \cdot 1 < 2a < 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 2 < 2a < 6$ και $1 \leq \beta \leq 5 \xrightarrow{(-3)} -3 \cdot 1 \geq -3\beta \geq -3 \cdot 5 \Leftrightarrow -15 \leq -3\beta \leq -3$.
- Επομένως $\left. \begin{array}{l} 2 < 2a < 6 \\ -15 \leq -3\beta \leq -3 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} 2+(-15) < 2a+(-3\beta) < 6+(-3) \Leftrightarrow -13 < 2a-3\beta < 3$, άρα η παράσταση $2a-3\beta$ βρίσκεται μεταξύ των αριθμών -13 και 3 .
- δ) $1 \leq \beta \leq 5 \xrightarrow{1, \beta, 5 > 0} \frac{1}{1} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$
- Επομένως $\left. \begin{array}{l} 1 < a < 3 \\ \frac{1}{5} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{(\cdot)} \frac{1}{5} < \frac{a}{\beta} < 3$, άρα η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $\frac{1}{5}$ και 3 .

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2α ΘΕΜΑΤΑ

■ ΘΕΜΑ 2_936

Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

Λύση

- α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.
Άρα η παράσταση ορίζεται για $x \geq 4$.

$$\begin{aligned} \beta) A &= (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1}) = \\ &= (\sqrt{x-4})^2 - (\sqrt{x+1})^2 = x-4 - (x+1) = -5 \end{aligned}$$

■ ΘΕΜΑ 2_938

- α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Έχουμε

$$3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Leftrightarrow 3^3 < \sqrt[3]{30^3} < 4^3 \Leftrightarrow 27 < 30 < 64,$$

που ισχύει.

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Έστω } \sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30} &\Leftrightarrow \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{30} > 6 \Leftrightarrow \\ 2\sqrt[3]{30} > 6 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{30} > \frac{6}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{30} > 3 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{30^3} > 3^3 &\Leftrightarrow 30 > 27, \text{ που ισχύει. Επομένως} \\ \text{η αρχική μας υπόθεση ήταν σωστή, άρα} \\ \sqrt[3]{30} > 6 - \sqrt[3]{30}. \end{aligned}$$

■ ΘΕΜΑ 2_944

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

- β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$

(Μονάδες 12)

Λύση

- α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $6-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$.
Άρα $x \in [4, 6]$.

- β) Για $x = 5$ είναι $A = \sqrt{5-4} + \sqrt{6-5} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$
και $A^2 + A - 6 = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$.

■ ΘΕΜΑ 2_947

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

- β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5}) \quad (\text{Μονάδες 13})$$

Λύση

- α) Πρέπει $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ και $x^2+4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $x \in [4, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Για } x = 4 \text{ είναι } A &= \sqrt{4^2+4} - \sqrt{4-4} = \sqrt{20} \text{ και} \\ A^2 - A &= (\sqrt{20})^2 - \sqrt{20} = 20 - \sqrt{4 \cdot 5} = \\ &= 2 \cdot 10 - 2\sqrt{5} = 2(10 - \sqrt{5}). \end{aligned}$$

■ ΘΕΜΑ 2_950

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

- β) Για $x = -3$, να αποδείξετε ότι:

$$A^3 + A^2 + A + 1 = 0 \quad (\text{Μονάδες 12})$$

Λύση

- α) Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ και $x^4 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $x \in (-\infty, 1]$.

β) Για $x = -3$ είναι:

$$A = \sqrt{1 - (-3)} - \sqrt[3]{(-3)^4} = \sqrt{4} - 3 = -1 \text{ και}$$

$$A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

■ ΘΕΜΑ 2_952

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$ (Μονάδες 12)

Λύση

α) Πρέπει $(x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

$$\text{Άρα } x \in [2, +\infty).$$

β) Για $x = 4$ είναι $B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ και

$$B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 16 = 2^4 = B^4.$$

■ ΘΕΜΑ 2_955

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}$, 1 , $\sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A - B &= (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = (\sqrt{2})^{2 \cdot 3} - (\sqrt[3]{2})^{3 \cdot 2} = \\ &= (\sqrt{2^2})^3 - (\sqrt[3]{2^3})^2 = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

β) Είναι $1 < 2 \Rightarrow \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2} \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{2}$ και από το ερώτημα (α) έχουμε

$$A - B = 4 > 0 \Rightarrow A > B \Rightarrow (\sqrt{2})^6 > (\sqrt[3]{2})^6 \Rightarrow$$

$$\sqrt{(\sqrt{2})^6} > \sqrt[3]{(\sqrt[3]{2})^6} \Rightarrow \sqrt{2} > \sqrt[3]{2}. \text{ Άρα}$$

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}.$$

■ ΘΕΜΑ 2_1276

Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} + \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)

Λύση

α) Τα υπόρριζα είναι τέλεια τετράγωνα, επομένως οι αριθμητές ορίζονται για κάθε τιμή του x . Για τους παρονομαστές πρέπει $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ και $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$. Τελικά, $x \in \mathbb{R} - \{-2, 3\}$.

β) Από την ανισοτική σχέση έχουμε $-2 < x \Leftrightarrow x + 2 > 0$ και $x < 3 \Leftrightarrow x - 3 < 0$.

$$K = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} + \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} =$$

$$= \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{|x-3|}{x-3} \stackrel{x+2>0}{x-3<0} = \frac{x+2}{x+2} - \frac{x-3}{x-3} = 1 - 1 = 0,$$

σταθερή.

■ ΘΕΜΑ 2_1300

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, \quad B = (\sqrt[3]{3})^6, \quad \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6.$$

α) Να δείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$. (Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \text{ και } \sqrt[6]{6}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Λύση

$$\alpha) A + B + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6 =$$

$$= 2^2 + 3^2 + 6 = 2^2 + 3^2 + 6 = 8 + 9 + 6 = 23$$

β) Αφού $B = 9$ και $\Gamma = 6$, έχουμε $B > \Gamma$, άρα

$$(\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt[6]{6})^6, \text{ οπότε, αφού οι αριθμοί } \sqrt[3]{3} \text{ και}$$

$$\sqrt[6]{6} \text{ είναι θετικοί, συμπεραίνουμε ότι } \sqrt[3]{3} > \sqrt[6]{6}.$$

■ΘΕΜΑ 2_3382

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$. (Μονάδες 13)

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} + \frac{\sqrt{5}^2-\sqrt{15}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \\ &= \frac{\sqrt{15}+3}{5-3} + \frac{5-\sqrt{15}}{5-3} = \frac{8}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) |x + A| = 1 &\stackrel{A=4}{\Leftrightarrow} |x + 4| = 1 \Leftrightarrow \\ &(x + 4 = 1 \text{ ή } x + 4 = -1) \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = -5) \end{aligned}$$

■ΘΕΜΑ 2_4311

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και

$B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; (Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; (Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Πρέπει $(x-2)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Πρέπει $(2-x)^3 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x \Leftrightarrow x \leq 2$.

Άρα η παράσταση B ορίζεται για κάθε $x \in (-\infty, 2]$.

γ) Για κάθε $x \leq 2$ ορίζονται και οι δύο παραστάσεις A και B και γράφονται

$$A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \stackrel{x \leq 2}{=} -(x-2) = 2-x \text{ και}$$

$$B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = 2-x.$$

Άρα για κάθε $x \leq 2$ είναι $A = B$.

■ΘΕΜΑ 2_4314

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[4]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$ (Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B . (Μονάδες 10)

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) A \cdot B \cdot \Gamma &= \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \\ &= 5^{\frac{2}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2+1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (5 \cdot 3)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

β) Γράφουμε πρώτα τους A , B ως ρίζες με τάξη ίση με το Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζών, ώστε να συγκρίνουμε μετά τα υπόρριζα:

$$\bullet A = \sqrt[3]{5} = \sqrt[2]{\sqrt{5^2}} = \sqrt[6]{25}$$

$$\bullet B = \sqrt{3} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$

Αφού $25 < 27$, θα είναι $\sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$, άρα $A < B$.

■ΘΕΜΑ 2_4316

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$. (Μονάδες 13)

Λύση

$$\alpha) AB = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{aligned} \beta) \Pi &= A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = \\ &= (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 = 4^2 - 2 = 16 - 2 = 14 \end{aligned}$$

■ΘΕΜΑ 2_8173

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$

$$\sqrt{3} \cong 1,73$$

$$\sqrt{5} \cong 2,24$$

$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$. (Μονάδες 12)

- β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;
(Μονάδες 13)

$$\begin{aligned} \beta) \frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}} &= \frac{3\sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5}}{\sqrt{9 \cdot 5} - \sqrt{5}} = \\ &= \frac{3\sqrt{4}\sqrt{5} + \sqrt{16}\sqrt{5}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = \\ &= \frac{6\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 5 \end{aligned}$$

Λύση

α) Έχουμε

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \cong 2 \cdot 2,24 = 4,48,$$

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cong 3 \cdot 2,24 = 6,72,$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \cong 4 \cdot 2,24 = 8,96.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

■ΘΕΜΑ 2_485

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Λύση

α) $\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

β) Πρέπει $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$. Για $\lambda \neq 1$ η λύση είναι

$$x = \frac{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{\lambda - 1} \Leftrightarrow x = \lambda + 1.$$

γ) Για να είναι η εξίσωση ταυτότητα, πρέπει να είναι της μορφής $0x = 0$, άρα πρέπει $\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ και $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$.

Άρα $\lambda = 1$.

■ΘΕΜΑ 2_507

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ και $\lambda = 2$ η (1) γίνεται αντίστοιχα $-9x = 0$, $-8x = -2$ και $-5x = -2$.

β) Η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

$$\lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 3.$$

γ) Για $\lambda \neq \pm 3$ η μοναδική λύση της (1) είναι

$$(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda \Leftrightarrow x = \frac{\lambda^2 - 3\lambda}{\lambda^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\lambda(\lambda - 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda}{\lambda + 3}. \text{ Πρέπει}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + 3} = 4 \Leftrightarrow \lambda = 4(\lambda + 3) \Leftrightarrow \lambda = 4\lambda + 12 \Leftrightarrow$$

$$-3\lambda = 12 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

■ ΘΕΜΑ 2_1055

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γίνεται

$$(1-1)x = (1+1)(1+2) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ αδύνατη.}$$

Για $\lambda = -1$ η εξίσωση γίνεται

$$(1-1)x = (-1+1)(-1+2) \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση όταν ο συντελεστής του αγνώστου δεν είναι μηδέν, δηλαδή $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1$.

■ ΘΕΜΑ 2_4302

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$, (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

Λύση

α) i) Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γίνεται

$$(1+3)x = 1^2 - 9 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2.$$

ii) Για $\alpha = -3$ η εξίσωση γίνεται

$$(-3+3)x = (-3)^2 - 9 \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ και είναι αόριστη (ή ταυτότητα), δηλαδή } x \in \mathbb{R}.$$

β) Για να έχει η εξίσωση μοναδική λύση, πρέπει $\alpha + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -3$.

Άρα για κάθε $\alpha \in (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση, η οποία είναι:

$$(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9 \Leftrightarrow (\alpha + 3)x = (\alpha - 3)(\alpha + 3) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{(\alpha - 3)(\alpha + 3)}{\alpha + 3} \Leftrightarrow x = \alpha - 3.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

■ ΘΕΜΑ 2_481

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

Λύση

α) Η εξίσωση είναι της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ με $a = 1$, $b = -2\lambda$ και $c = 4(\lambda - 1)$. Η διακρίνουσα

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) =$$

$$= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda - 4)^2.$$

β) Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι

$$\Delta = (2\lambda - 4)^2 \geq 0, \text{ άρα η εξίσωση έχει}$$

πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Είναι $x_1 + x_2 = S = 2\lambda$ και $x_1 x_2 = P = 4(\lambda - 1)$,

οπότε η εξίσωση γίνεται

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow 2\lambda = 4(\lambda - 1) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

■ ΘΕΜΑ 2_483

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$. (Μονάδες 13)

Λύση

$$\alpha) |2x - 1| = 3 \Leftrightarrow (2x - 1 = 3 \text{ ή } 2x - 1 = -3) \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -1)$$

β) Επειδή $\alpha < \beta$, είναι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$. Η εξίσωση γίνεται $-x^2 + 2x + 3 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ x_2 = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \end{cases}$$

■ ΘΕΜΑ 2_493

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

Λύση

$$\alpha) |x - 2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x - 2 = \sqrt{3} \text{ ή } x - 2 = -\sqrt{3}) \Leftrightarrow (x = 2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 2 - \sqrt{3})$$

β) Για $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ και

$$x_2 = 2 - \sqrt{3}, \text{ είναι } x_1 + x_2 = 4 \text{ και}$$

$$x_1 x_2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1.$$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες x_1, x_2 είναι η $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

■ ΘΕΜΑ 2_496

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

Λύση

α) Η διακρίνουσα είναι $\Delta = (2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda - 4)^2$.

β) Η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 4)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Είναι $x_1 + x_2 = -2\lambda$ και $x_1 x_2 = 4(\lambda - 1)$. Άρα

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-2\lambda)^2 + 4(\lambda - 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}.$$

■ ΘΕΜΑ 2_1005

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1+x}{x-1}$ και $B = \frac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Πρέπει $(x - 1 \neq 0 \text{ και } x^2 - x \neq 0) \Leftrightarrow$

$$(x - 1 \neq 0 \text{ και } x(x - 1) \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$(x - 1 \neq 0 \text{ και } x \neq 0) \Leftrightarrow$$

$$(x \neq 1 \text{ και } x \neq 0).$$

β) $A = B \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow$

$$\frac{x(1+x)}{x(x-1)} - \frac{2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$ και οι

$$\text{ρίζες } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$$

Η λύση $x = 1$ απορρίπτεται, άρα $x = -2$.

■ ΘΕΜΑ 2_1007

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$.
(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.
(Μονάδες 10)

Λύση

α) $-2x^2 + 10x = 12 \Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-12) = 100 - 96 = 4 \text{ και οι ρίζες}$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-10+2}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ x_2 = \frac{-10-2}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{cases}$$

β) Είναι

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x = 2, \text{ απορρίπτεται, ή } x = 3, \text{ δεκτή}) \Leftrightarrow x = 3.$$

■ ΘΕΜΑ 2_1093

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B . (Μονάδες 9)

Λύση

α) i) $A + B = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{5 - \sqrt{5}} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{1}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{5^2 - (\sqrt{5})^2} + \frac{5 + \sqrt{5}}{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{25 - 5} + \frac{5 + \sqrt{5}}{25 - 5} = \\ &= \frac{5 - \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5}}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ii) $A \cdot B = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{25 - 5} = \frac{1}{20}$

β) $S = A + B = \frac{1}{2}$ και $P = AB = \frac{1}{20}$ και

κατασκευάζουμε την εξίσωση 2ου βαθμού που δίνεται από τη σχέση

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0.$$

■ ΘΕΜΑ 2_1275

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$,

$$x_1 \cdot x_2 \text{ και } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}. \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

Λύση

α) $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = -1$, οπότε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0,$$

άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

β) Έχουμε $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$,

$$x_1 x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5.$$

γ) Βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των

ριζών $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$:

$$S = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5 \text{ και } P = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

και μία εξίσωση 2ου βαθμού με τις παραπάνω ρίζες είναι $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$.

■ΘΕΜΑ 2_1298

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \text{ και } \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

Λύση

$$\text{α) } \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30 \Leftrightarrow \alpha \beta (\alpha + \beta) = -30 \stackrel{\alpha + \beta = 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2\alpha\beta = -30 \Leftrightarrow \alpha\beta = -15$$

β) Βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των α και β : $S = \alpha + \beta = 2$ και $P = \alpha\beta = -15$ και μία εξίσωση 2ου βαθμού με τις παραπάνω ρίζες είναι $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, με

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 > 0 \text{ και ρίζες}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2-8}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases}$$

Άρα $\alpha = -3$ και $\beta = 5$ ή $\alpha = 5$ και $\beta = -3$.

■ΘΕΜΑ 2_1509

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ . (Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 12)

Λύση

α) Για $x = 1$ η (1) γράφεται

$$1^2 - (\lambda - 1) \cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda + 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8.$$

β) Για $\lambda = 2$ η (1) γράφεται

$$x^2 - (2 - 1)x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0.$$

$$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 6, \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$$

$$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1 - 24 = -23 < 0, \text{ αδύνατη.}$$

■ΘΕΜΑ 2_3839

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$. (Μονάδες 13)

Λύση

α) Αντικαθιστούμε όπου x το -2 :

$$\lambda(-2)^2 - (\lambda - 1)(-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + 2(\lambda - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$6\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

β) Για $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι 2ου βαθμού. Βρίσκουμε τη διακρίνουσα του τριωνόμου $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1$ με

$$\alpha = \lambda, \beta = -(\lambda - 1), \gamma = -1,$$

$$\Delta = [-(\lambda - 1)]^2 - 4\lambda \cdot (-1) = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \geq 0.$$

Άρα για κάθε $\lambda \neq 0$ ισχύει $\Delta \geq 0$, επομένως η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

■ΘΕΜΑ 2_3847

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες, (Μονάδες 13)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (Μονάδες 12)

Λύση

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού, επειδή $\lambda \neq -2$.

Έχουμε $\alpha = \lambda + 2$, $\beta = 2\lambda$, $\gamma = \lambda - 1$,

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 1) =$$

$$= 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2) =$$

$$= 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4\lambda + 8.$$

α) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 8 \Leftrightarrow \lambda < 2$,

άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές, άνισες ρίζες

για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2)$.

β) $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda}{\lambda + 2}$. Πρέπει να ισχύει

$$S = 2 \Leftrightarrow -\frac{2\lambda}{\lambda + 2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2(\lambda + 2) \Leftrightarrow$$

$$-2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow 4\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Η τιμή του λ είναι δεκτή, αφού $-1 \in (-\infty, 2)$.

■ ΘΕΜΑ 2_3857

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha\beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta) = 20 \stackrel{\alpha\beta=4}{\Leftrightarrow}$

$$4(\alpha + \beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β) Η εξίσωση που ζητάμε έχει $S = \alpha + \beta = 5$ και

$$P = \alpha\beta = 4.$$

Επομένως η εξίσωση είναι της μορφής

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ δηλαδή } x^2 - 5x + 4 = 0.$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0, \text{ οπότε}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}.$$

Άρα $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ ή $\alpha = 4$ και $\beta = 1$.

■ ΘΕΜΑ 2_3863

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Λύση

α) $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Rightarrow$

$$\alpha\beta(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = -12 \Rightarrow \alpha\beta(\alpha + \beta)^2 = -12 \Rightarrow$$

$$\alpha\beta \cdot (-1)^2 = -12 \Rightarrow \alpha\beta = -12$$

β) Μια τέτοια εξίσωση είναι η

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0, \text{ δηλαδή η εξίσωση}$$

$$x^2 + x - 12 = 0. \text{ Η εξίσωση αυτή έχει}$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 1 + 48 = 49 > 0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}.$$

Έτσι, $(\alpha = -4, \beta = 3)$ ή $(\alpha = 3, \beta = -4)$.

■ ΘΕΜΑ 2_4306

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 2$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

Λύση

α) $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -6$. Άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49 > 0, \text{ οπότε}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

β) $|x-1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-1 < 2 \Leftrightarrow -2+1 < x-1+1 < 2+1 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Άρα $x \in (-1, 3)$.

γ) Εξετάζουμε αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) ανήκουν στο σύνολο των λύσεων της ανίσωσης (2):

$$-\frac{3}{2} \notin (-1, 3), \text{ ενώ } 2 \in (-1, 3).$$

Άρα η μόνη τιμή του x που ικανοποιεί τις (1) και

(2) είναι η 2.

■ΘΕΜΑ 2_4308

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση:

$$\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \quad (\text{Μονάδες 15})$$

Λύση

α) Πρέπει

$$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1) \text{ και}$$

$$1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1. \text{ Τελικά, } x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$

β) Για $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-1) \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - x(x-1) \frac{1}{x-1} = x(x-1) \cdot 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -1, \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0, \text{ οπότε}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, \text{ απορρίπτεται} \\ x_2 = -\frac{1}{2}, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

■ΘΕΜΑ 2_4309

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20 \text{ cm}$ και εμβαδό $E = 24 \text{ cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 10)

Λύση

α) Αν x, y είναι οι πλευρές του ορθογωνίου, τότε:

$$\Pi = 2x + 2y \stackrel{\Pi=20}{\Leftrightarrow} 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \quad (1)$$

$$E = xy \Leftrightarrow xy = 24 \quad (2)$$

Οι x και y είναι ρίζες της εξίσωσης που ζητάμε, επομένως $S = x + y = 10$ και $P = xy = 24$.

Άρα μία εξίσωση με ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου είναι

$$x^2 - Sx + P = 0 \stackrel{\substack{S=10 \\ P=24}}{\Leftrightarrow} x^2 - 10x + 24 = 0.$$

β) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 10x + 24 = 0$.

$$\alpha = 1, \beta = -10, \gamma = 24, \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 =$$

$$= 100 - 96 = 4 > 0, \text{ οπότε}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{12}{2} = 6 \\ x_2 = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 6 cm και 4 cm .

■ΘΕΜΑ 2_4310

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \text{ να δείξετε ότι}$$

$$\alpha \cdot \beta = -64. \quad (\text{Μονάδες 8})$$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

(Μονάδες 7)

Λύση

α) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$

$$2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \xleftrightarrow[\alpha^2 + \beta^2 = 272]{\alpha + \beta = 12}$$

$$2\alpha\beta = 12^2 - 272 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 144 - 272 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$$

β) Το άθροισμα των ριζών της ζητούμενης εξίσωσης είναι $S = \alpha + \beta = 12$ και το γινόμενο των ριζών της είναι $P = \alpha\beta = -64$.

Άρα μία τέτοια εξίσωση είναι η

$$x^2 - Sx + P = 0 \xleftrightarrow[P = -64]{S = 12} x^2 - 12x - 64 = 0.$$

γ) Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-64) = 144 + 256 = 400 > 0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{400}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12+20}{2} = 16 \\ x_2 = \frac{12-20}{2} = -4 \end{cases}$$

Άρα $\alpha = 16$ και $\beta = -4$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = 16$.

■ ΘΕΜΑ 2_4313

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3-\sqrt{7}}, B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.
(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B .
(Μονάδες 13)

Λύση

α) $A + B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} =$

$$= \frac{1(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} + \frac{1(3-\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{(3+\sqrt{7}) + (3-\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7}}{3^2 - \sqrt{7}^2} =$$

$$= \frac{6}{9-7} = \frac{6}{2} = 3 \text{ και}$$

$$AB = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{1 \cdot 1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} =$$

$$= \frac{1}{3^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}.$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$ με $S = A + B = 3$ και

$$P = AB = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

■ ΘΕΜΑ 2_4317

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.
(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1 \cdot x_2 = -3$.
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Για την εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$ ισχύει ότι $\lambda \neq -2 \Leftrightarrow \lambda + 2 \neq 0$, άρα είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε τη διακρινουσά της:

$$\alpha = \lambda + 2, \beta = 2\lambda \text{ και } \gamma = \lambda - 1, \text{ οπότε}$$

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 1) =$$

$$= 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2) =$$

$$= 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 + \lambda - 2) =$$

$$= 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4\lambda + 8.$$

Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, πρέπει

$\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 8 \Leftrightarrow \lambda < 2$. Άρα για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2)$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Για $\lambda \in (-\infty, 2)$ έχουμε $P = x_1 x_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2}$, οπότε

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 2} = -3 \Leftrightarrow \lambda - 1 = -3(\lambda + 2) \Leftrightarrow$$

$$\lambda - 1 = -3\lambda - 6 \Leftrightarrow 4\lambda = -5 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{4}.$$

4α ΘΕΜΑΤΑ

■ΘΕΜΑ 4_1890

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1),$$

με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1)

$$\text{είναι: } \Delta = 12\lambda + 25 \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση

(1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα

των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών

$$P = x_1 x_2. \quad (\text{Μονάδες } 4)$$

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση:

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 x_2 + 3)^2 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a = \lambda + 2$, $\beta = 2\lambda + 3$ και $\gamma = \lambda - 2$.

α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (2\lambda + 3)^2 - 4(\lambda + 2)(\lambda - 2) = \\ &= (2\lambda)^2 + 2 \cdot 3 \cdot (2\lambda) + 3^2 - 4(\lambda^2 - 4) = \\ &= 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 16 = 12\lambda + 25. \end{aligned}$$

β) Για να έχει η (1) δύο πραγματικές και άνισες

ρίζες, πρέπει $\lambda \neq -2$ και

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12\lambda + 25 > 0 \Leftrightarrow 12\lambda > -25 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{25}{12}.$$

$$\text{Τελικά, } \lambda \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (-2, +\infty).$$

γ) Είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda + 3}{\lambda + 2}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}$.

δ) $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 x_2 + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 + x_2 - 1 = 0 \text{ και } x_1 x_2 + 3 = 0) \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{2\lambda + 3}{\lambda + 2} - 1 = 0 \text{ και } \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2} + 3 = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{-3\lambda - 5}{\lambda + 2} = 0 \text{ και } \frac{4\lambda + 4}{\lambda + 2} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\lambda = -\frac{5}{3} \text{ και } \lambda = -1\right), \text{ αδύνατη.}$$

Άρα δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η δοσμένη σχέση.

■ΘΕΜΑ 4_1955

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B, t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \text{ και } |t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \text{ και } t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B . (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (Μονάδες 5)

Λύση

α) i) Έχουμε $|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow (t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \text{ ή}$

$$t_A - t_\Delta = t_\Delta - t_B) \Leftrightarrow$$

$$(t_A = t_B, \text{ αδύνατη, ή } t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}).$$

$$\text{Τελικά, } t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}.$$

ii) Ισχύει $t_A < t_B < t_\Delta$. Αναζητούμε τη θέση του t_Γ :

$$\bullet \text{ Έστω } t_\Gamma > t_B \Leftrightarrow \frac{t_A + 2t_B}{3} > t_B \Leftrightarrow$$

$$t_A + 2t_B > 3t_B \Leftrightarrow t_A > t_B,$$

άτοπο, άρα $t_\Gamma \leq t_B$. Όμως, αν

$$t_\Gamma = t_B \Leftrightarrow t_A = t_B, \text{ άτοπο, άρα } t_\Gamma < t_B.$$

$$\bullet \text{ Έστω } t_\Gamma > t_A \Leftrightarrow \frac{t_A + 2t_B}{3} > \frac{t_A + t_B}{2} \Leftrightarrow$$

$$2t_A + 4t_B > 3t_A + 3t_B \Leftrightarrow$$

$$4t_B - 3t_A > 3t_A - 2t_B \Leftrightarrow t_B > t_A, \text{ που ισχύει από υπόθεση, άρα } t_\Gamma > t_A.$$

Τελικά, $t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$, δηλαδή πρώτος

τερμάτισε ο Αργύρης, δεύτερος ο Δημήτρης, τρίτος ο Γιώργος και τελευταίος ο Βασίλης.

- β)** i) Μία τέτοια εξίσωση είναι η $x^2 - 6x + 8 = 0$.
ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - 6x + 8 = 0$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Οι χρόνοι τερματισμού του Αργύρη (t_A) και του Βασίλη (t_B) είναι οι ρίζες της εξίσωσης και, αφού $t_B > t_A$, προκύπτει ότι $t_B = 4$ λεπτά και $t_A = 2$ λεπτά. Επομένως

$$t_T = \frac{2+2 \cdot 4}{3} = \frac{2+8}{3} = \frac{10}{3} \text{ λεπτά και}$$

$$t_A = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ λεπτά.}$$

■ ΘΕΜΑ 4_2055

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0, (1)$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)
β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή:
$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)
δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

Λύση

- α)** Για να είναι η (1) εξίσωση 2ου βαθμού, πρέπει
$$\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1).$$

β) Έχουμε $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$$\lambda(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1)x + (\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0.$$

- γ)** Από την ισοδύναμη μορφή

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0 \text{ της (1) έχουμε}$$

$$\Delta = [-(\lambda + 1)]^2 - 4\lambda = (\lambda + 1)^2 - 4\lambda =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0, \text{ αφού}$$

$\lambda \neq 1$, άρα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

- δ)** Για να είναι η (1) 2ου βαθμού, θα ισχύουν για τον λ οι περιορισμοί του ερωτήματος (α), άρα η ισοδύναμη μορφή της (1) θα είναι $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ με

$$\Delta = (\lambda - 1)^2, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 1)^2}}{2\lambda} = \frac{\lambda + 1 \pm (\lambda - 1)}{2\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\lambda + 1 - \lambda + 1}{2\lambda} = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \\ x_2 = \frac{\lambda + 1 + \lambda - 1}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{2\lambda} = 1 \end{cases}$$

■ ΘΕΜΑ 4_2081

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$. (Μονάδες 5)
β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Για $\lambda = 0$ η εξίσωση είναι πρωτοβάθμια και γίνεται $-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

β) i) Για $\lambda \neq 0$ η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια με διακρίνουσα $\Delta = [2(\lambda - 1)]^2 - 4\lambda(\lambda - 2) =$

$$\begin{aligned}
 &= 4(\lambda - 1)^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda = \\
 &= 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda^2 + 8\lambda = \\
 &= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4 > 0,
 \end{aligned}$$

άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και

$$\text{άνισες, τις } x_{1,2} = \frac{-2(\lambda - 1) \pm \sqrt{4}}{2\lambda} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\lambda + 2 - 2}{2\lambda} = \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \\ x_2 = \frac{-2\lambda + 2 + 2}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 4}{2\lambda} = -1 + \frac{2}{\lambda} \end{cases}$$

ii) Έχουμε

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow \left| -1 - \left(-1 + \frac{2}{\lambda} \right) \right| > 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{2}{\lambda} \right| > 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow 2 > |\lambda| \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2.$$

Όμως $\lambda \neq 0$, άρα $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

■ ΘΕΜΑ 4_2332

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ . (Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ . (Μονάδες 10)

Λύση

$$\alpha) \Delta = (-4)^2 - 4(2 - \lambda^2) = 16 - 8 + 4\lambda^2 =$$

$= 4\lambda^2 + 8 > 0$, άρα η (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\beta) \text{ i) } S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\text{ii) } P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2 - \lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$$

γ) i) Αν $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, τότε

$$S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow 4 = 2 + \sqrt{3} + x_2 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = 4 - 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\text{ii) } P = x_1 x_2 \Leftrightarrow 2 - \lambda^2 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$2 - \lambda^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

■ ΘΕΜΑ 4_4551

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

Λύση

$$\alpha) \Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 =$$

$$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0,$$

άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$$\beta) S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \text{ και}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1.$$

γ) i) Ισχύει $P = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

$$\text{Για } \lambda < 0 \text{ έχουμε } S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} < 0, \text{ άρα το}$$

τριώνυμο έχει αρνητικές ρίζες.

$$\text{ii) } |x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow \left| \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda} \geq 0$$

που ισχύει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_4654

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0, \gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

Λύση

α) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 7x^2 + 12 = 0 \quad (*)$

Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η (*) γράφεται

$$\omega^2 - 7\omega + 12 = 0.$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1 > 0, \text{ άρα}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \omega_2 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

• Για $\omega = 3$ έχουμε $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

• Για $\omega = 4$ έχουμε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Τελικά, η εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = -2, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}, x_4 = 2$.

β) $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1)$

Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η (1) γράφεται

$$\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0 \quad (2).$$

Για τη (2) έχουμε $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$ από υπόθεση,

άρα η (2) έχει δύο ρίζες διαφορετικές, έστω

ω_1, ω_2 , για τις οποίες ισχύει:

• $P = \omega_1\omega_2 = \gamma > 0$, άρα οι ρίζες ω_1, ω_2 είναι ομόσημες.

• $S = \omega_1 + \omega_2 = -\beta > 0$ (αφού $\beta < 0$), άρα οι ρίζες είναι και οι δύο θετικές.

Επομένως για $\omega = \omega_1 > 0$ προκύπτει

$$x^2 = \omega_1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_1}, \text{ ενώ για } \omega = \omega_2 > 0$$

$$\text{προκύπτει } x^2 = \omega_2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\omega_2}. \text{ Τελικά, η (1)}$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_4659

Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - 5x + a = 0$, με παράμετρο $a \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|a| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση

έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $a = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

Λύση

α) Έχουμε $|a| \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow |a| \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow$

$$4a^2 \leq 25 \Leftrightarrow 25 - 4a^2 \geq 0 \quad (1).$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4a \cdot a = 25 - 4a^2 \geq 0, \text{ από τη σχέση (1).}$$

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς και, επειδή το γινόμενο τους είναι

$P = x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a}{a} = 1$, οι αριθμοί αυτοί είναι αντίστροφοι.

β) Για $a = 2$ η εξίσωση γράφεται $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Έχουμε $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

γ) Για $x + \frac{1}{x} = y$ η εξίσωση

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \text{ γίνεται}$$

$2y^2 - 5y + 2 = 0$. Από το ερώτημα (β) έχει λύσεις

τους αριθμούς 2 και $\frac{1}{2}$. Για $y = 2$ έχουμε

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x \cdot \frac{1}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ δεκτή. Για } y = \frac{1}{2} \text{ έχουμε}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 2 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0.$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 1 - 16 = -15 < 0, \text{ αδύνατη.}$$

Τελικά, $x = 1$.

■ ΘΕΜΑ 4_4665

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4 \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \Delta &= (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(\lambda^2 + 5)] = \\ &= \lambda^2 + 4\lambda^2 + 20 = 5\lambda^2 + 20 \end{aligned}$$

β) $5\lambda^2 + 20 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Αρχικά βρίσκουμε $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -(\lambda^2 + 5).$$

Έχουμε

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow$$

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow -(\lambda^2 + 5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda^2 - 5 - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0.$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16 > 0, \text{ οπότε}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \\ \lambda_2 = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{cases}.$$

■ ΘΕΜΑ 4_4667

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

(Μονάδες 8)

Λύση

α) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25 > 0$, οπότε

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}.$$

β) Αφού α, β ομόσημοι, τότε $\alpha\beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$.

i) Για $x = \frac{\alpha}{\beta}$ η (1) γίνεται:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{3\alpha}{\beta} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0, \text{ που ισχύει.}$$

ii) Αφού ο $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) και

$\frac{\alpha}{\beta} > 0, \frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$, δηλαδή ο α είναι τετραπλάσιος του β .

■ΘΕΜΑ 4_4681

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ίσες, πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

γ) Αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$, για τις ρίζες x_1, x_2 της (1) ισχύει

$x_1 \neq x_2$. Έχουμε

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{|x_1 - x_2|} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} S=1 \\ P=\lambda-\lambda^2 \end{matrix}$$

$$1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 \Leftrightarrow 4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1).$$

Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

■ΘΕΜΑ 4_4835

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Ισχύει $x_1 + x_2 = S = \beta$. Άρα

$$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow (\beta = 4 \text{ ή } \beta = -4).$$

β) Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, ισχύει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow$$

$$16 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow 4\gamma < 16 \Leftrightarrow \gamma < \frac{16}{4} \Leftrightarrow \gamma < 4.$$

γ) Έχουμε $x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - \beta|x| + 3 = 0$.

Για $|x| = \omega$, η εξίσωση γράφεται

$$\omega^2 - \beta\omega + 3 = 0 \quad (2).$$

• Για $\beta = 4$, η (2) γράφεται $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$ με $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ και

$$\omega_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \omega_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Για $\omega = 3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$, ενώ για

$$\omega = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1).$$

• Για $\beta = -4$, η (2) γράφεται $\omega^2 + 4\omega + 3 = 0$ με $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ και

$$\omega_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \omega_2 = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Για $\omega = -3 \Leftrightarrow |x| = -3$, αδύνατη, και για

$\omega = -1 \Leftrightarrow |x| = -1$, αδύνατη.

Άρα η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\beta = -4$.

■ ΘΕΜΑ 4_4857

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$ όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$,

τότε να αποδείξετε ότι: $(1+x_1)(1+x_2) \geq 4$.

(Μονάδες 7)

Λύση

α) $\Delta = [-(\alpha^2 + \beta^2)]^2 - 4\alpha\beta \cdot \alpha\beta =$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2 =$$

$$= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 4\alpha^2\beta^2 =$$

$$= \alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2$$

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες άνισες, πρέπει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - \beta^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \neq 0 \Leftrightarrow (\alpha \neq \beta \text{ και } \alpha \neq -\beta).$$

Επειδή α, β δύο θετικοί αριθμοί, αρκεί $\alpha \neq \beta$.

$$x_{1,2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2)^2}}{2\alpha\beta} =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{2\alpha^2}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \\ x_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha^2 - \beta^2)}{2\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Έχουμε $S = x_1 + x_2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$ και $P = x_1 x_2 = 1$.

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 4 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1 x_2 \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$S+P \geq 4-1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 1 \geq 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

■ ΘΕΜΑ 4_4903

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) $\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) =$

$$= 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1, \text{ ανεξάρτητη του } \lambda.$$

β) $x_{1,2} = \frac{-(2\lambda - 1) \pm \sqrt{1}}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 1 \pm 1}{2\lambda} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\lambda + 1 + 1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 2}{2\lambda} = -1 + \frac{1}{\lambda} \\ x_2 = \frac{-2\lambda + 1 - 1}{2\lambda} = \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \end{cases}$$

γ) $d(x_1, x_2) = 2 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\lambda} - 1 + 1 \right| = 2 \Leftrightarrow$

$$\left| \frac{1}{\lambda} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|} = 2 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

■ ΘΕΜΑ 4_4957

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

Λύση

α) $\alpha = \lambda, \beta = -(\lambda^2 + 1), \gamma = \lambda$, επομένως

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\lambda^2 = \\ &= (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Έχουμε $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-(\lambda^2 + 1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ και $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$.

γ) Ισχύει $P = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Αφού $\lambda > 0$, τότε και $\frac{1}{\lambda} > 0$, άρα $S = \lambda + \frac{1}{\lambda} > 0$, επομένως το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

δ) $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x_1 x_2} \leq x_1 + x_2 \xleftrightarrow{x_1 x_2 = 1} \Leftrightarrow \xleftrightarrow{x_1 + x_2 = \lambda + \frac{1}{\lambda}}$

$$2 \cdot 1 \leq \lambda + \frac{1}{\lambda} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} 2\lambda \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

■ ΘΕΜΑ 4_4962

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } 1. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

Λύση

α) $\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4\lambda \cdot \lambda = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β) $S = x_1 + x_2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ και $P = x_1 x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$.

γ) Αφού $P = 1 > 0$, οι ρίζες είναι ομόσημες, ή και οι δύο θετικές ή και οι δύο αρνητικές. Όμως

$S = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ και, αφού $\lambda > 0$, $S > 0$, άρα οι ρίζες είναι και οι δύο θετικές.

δ) Έχουμε $\frac{x_1 + x_2}{2} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - 1 = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{2\lambda} =$

$$= \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2\lambda} = \frac{(\lambda - 1)^2}{2\lambda} > 0 \text{ για } 0 < \lambda \neq 1, \text{ άρα}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > 1.$$

■ ΘΕΜΑ 4_4970

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$. (Μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι:

• $\rho \neq 0$ και

• ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$-36x^2 + \lambda x + 2 = 0 \quad (\text{Μονάδες } 4 + 6 = 10)$$

Λύση

α) $\Delta = \lambda^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-36) = \lambda^2 + 288 > 0$, άρα η (1)

έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του λ .

β) Αφού ο ρ είναι ρίζα της (1), θα ισχύει

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (2).$$

i) Για να είναι ο $-\rho$ ρίζα, θα πρέπει

$$2(-\rho)^2 - \lambda(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

ii) • Έστω $\rho = 0$. Τότε η (1) δίνει

$$2 \cdot 0^2 + \lambda \cdot 0 - 36 = 0 \Rightarrow -36 = 0, \text{ άτοπο,}$$

άρα $\rho \neq 0$.

• Για να είναι ο $\frac{1}{\rho}$ ρίζα της εξίσωσης

$$-36x^2 + \lambda x + 2 = 0, \text{ θα πρέπει}$$

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda \frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-36}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-36}{\rho^2} + \frac{\lambda\rho}{\rho^2} + \frac{2\rho^2}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\rho^2 + \lambda\rho - 36}{\rho^2} = 0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

ΘΕΜΑ 4_4975

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Έχουμε $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 8x^2 - 9 = 0$,

άρα θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$ προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 - 8\omega - 9 = 0$, την οποία λύνουμε:

$$\alpha = 1, \beta = -8, \gamma = -9, \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) =$$

$$= 64 + 36 = 100 > 0, \text{ οπότε}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{8+10}{2} = 9 > 0, \text{ δεκτή} \\ \omega_2 = \frac{8-10}{2} = -1 < 0, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \omega = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3).$$

β) Έχουμε $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 + \beta x^2 + \gamma = 0$,

άρα θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$ προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ (2), με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

i) Αν $\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\gamma > -4 \cdot 0 \Leftrightarrow -4\gamma > 0$ και $\beta^2 \geq 0$, άρα με πρόσθεση κατά μέλη $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (υπερισχύει η γνήσια ανισότητα).

ii) $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$, άρα η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες άνισες, τις ω_1 και ω_2 .

Το γινόμενο των ριζών είναι $P = \gamma < 0$, άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

Αν $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$, τότε

η $x^2 = \omega_1$ έχει δύο ρίζες, ενώ η $x^2 = \omega_2$ είναι αδύνατη.

Τελικά, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

Τα ίδια συμπεράσματα βγαίνουν αν $\omega_1 < 0$ και $\omega_2 > 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_4992

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34 \text{ cm}$ και διαγώνιο $\delta = 13 \text{ cm}$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$. (Μονάδες 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

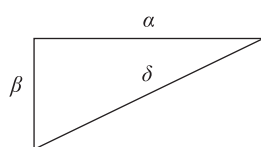
iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm .

(Μονάδες 10)

Λύση

α)



Έστω α και β οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε έχουμε $\Pi = 2\alpha + 2\beta$ και $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

$$\text{i) Έχουμε } \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 34 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 17 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)^2 = 17^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 289 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2\alpha\beta = 289 - 169 \Rightarrow 2\alpha\beta = 120 \Rightarrow \alpha\beta = 60 \Rightarrow E = 60 \text{ cm}^2.$$

ii) Αφού η εξίσωση έχει ρίζες τα μήκη α και β , θα ισχύει $S = \alpha + \beta = 17$ και $P = \alpha\beta = 60$.

Άρα η εξίσωση έχει τη μορφή

$$x^2 - 17x + 60 = 0 \quad (2).$$

iii) Η (2) έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0,$$

$$\text{άρα } x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12 \\ x_2 = \frac{17-7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \end{cases} \text{ . Συνεπώς η μία πλευρά}$$

του ορθογωνίου έχει μήκος 12 cm και η άλλη 5 cm .

β) Αν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο, τότε γι' αυτό θα ισχύει $\alpha\beta = 40$ και

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 64 \Rightarrow$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \stackrel{\alpha\beta=40}{\Rightarrow} (\alpha + \beta)^2 - 80 = 64 \Rightarrow$$

$(\alpha + \beta)^2 = 144 \stackrel{\alpha+\beta>0}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 12$, οπότε, όπως στο ερώτημα (α.ii), συμπεραίνουμε ότι τα μήκη αυτού του ορθογωνίου θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 12x + 40 = 0$, η οποία όμως έχει $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη. Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_5317

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. (Μονάδες 15)

Λύση

α) Έχουμε $x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 9x^2 + 20 = 0$,

άρα θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$ προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$, την οποία λύνουμε:

$$\alpha = 1, \beta = -9, \gamma = 20, \text{ άρα}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1 > 0,$$

$$\text{οπότε } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{9+1}{2} = 5 > 0, \text{ δεκτή} \\ \omega_2 = \frac{9-1}{2} = 4 > 0, \text{ δεκτή} \end{cases}.$$

$$\bullet \text{ Για } \omega = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow (x = \sqrt{5} \text{ ή } x = -\sqrt{5}).$$

$$\bullet \text{ Για } \omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2).$$

Άρα η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Αν $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1), τότε θέτοντας $x^2 = \omega$

προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ (2), με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$.

Για να έχει η (1) δύο πραγματικές ρίζες, πρέπει η (2) να έχει μία μόνο θετική ρίζα.

Αυτό συμβαίνει είτε αν

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma = 0 \Leftrightarrow \beta^2 = 4\gamma \text{ με } \beta < 0,$$

ώστε η διπλή ρίζα $-\frac{\beta}{2}$ να είναι θετική, είτε αν

$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$ και $P = \gamma < 0$, ώστε οι ρίζες να είναι ετερόσημες.

Για την 1η περίπτωση:

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 4x^2 + 4 = 0, \text{ άρα}$$

θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$ προκύπτει η εξίσωση

$$\omega^2 - 4\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}).$$

Για τη 2η περίπτωση:

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2x^2 - 3 = 0, \text{ άρα}$$

θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$ προκύπτει η εξίσωση

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0, \text{ με}$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0, \text{ οπότε}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow \omega_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \text{ δεκτή} \\ \omega_2 = \frac{2-4}{2} = -1, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \omega = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow (x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}).$$

■ΘΕΜΑ 4_6223

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$.

(Μονάδες 9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$. (Μονάδες 9)

Λύση

α) $\alpha = 1, \beta = -5\lambda$ και $\gamma = -1$, άρα

$$\Delta = (-5\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 25\lambda^2 + 4 > 0, \text{ επομένως η}$$

εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Έχουμε $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-5\lambda}{1} = 5\lambda$ και

$$x_1 x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1.$$

$$i) (x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(5\lambda)^2 - 18 - 7 \cdot (-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow$$

$$25\lambda^2 - 18 - 7 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1).$$

$$ii) x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2 =$$

$$= x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 4 - 3(x_1 + x_2) =$$

$$= -1 \cdot 5\lambda + 4 - 3 \cdot 5\lambda = -5\lambda + 4 - 15\lambda =$$

$$= 4 - 20\lambda \stackrel{\lambda=1}{=} 4 - 20 = -16$$

■ΘΕΜΑ 4_7263

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

Λύση

α) $\alpha = 1, \beta = -6, \gamma = \lambda - 7$, άρα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - 7) = 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda.$$

Για να έχει το τριώνυμο πραγματικές ρίζες, πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$.

Άρα $\lambda \in (-\infty, 16]$.

β) i) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6$,

$$P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$$

ii) Για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$ ισχύει ότι

$\lambda \in (-\infty, 16]$, άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές

ρίζες. Επίσης, $\lambda \neq 16$, άρα $\Delta \neq 0$, επομένως έχει δύο ρίζες άνισες.

Ακόμα, $\lambda > 7 \Leftrightarrow \lambda - 7 > 0 \Leftrightarrow P > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Όμως $S = 6 > 0$, άρα οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) $(1) \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$, οπότε θέτοντας

$$|x| = \omega \geq 0 \text{ έχουμε } \omega^2 - 6\omega + \lambda - 7 = 0 \quad (2).$$

Αν ρ ρίζα της (2), τότε $\omega = \rho \Leftrightarrow |x| = \rho$.

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες μόνο αν $\rho > 0$.

Άρα, για να έχει τέσσερις ρίζες η (1), αρκεί

ισοδύναμα να εξετάσουμε πότε έχει η (2) δύο θετικές ρίζες άνισες μεταξύ τους (οπότε από καθεμία προκύπτουν δύο ρίζες της (1)).

Αυτό συμβαίνει όταν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 - 4(\lambda - 7) > 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda + 28 > 0 \Leftrightarrow$$

$$64 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 64 \Leftrightarrow \lambda < 16 \text{ και}$$

$$P > 0 \Leftrightarrow \lambda - 7 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 7 \text{ και } S > 0 \Leftrightarrow 6 > 0, \text{ που ισχύει.}$$

Τελικά, το ζητούμενο ισχύει μόνο για

$$\lambda \in (7, 16).$$

ii) Ισχύει $(3\sqrt{10})^2 = 3^2 \cdot 10 = 9 \cdot 10 = 90$,

$$7^2 = 49 \text{ και } 16^2 = 256.$$

$$\text{Άρα } 49 < 90 < 256 \Leftrightarrow 7^2 < (3\sqrt{10})^2 < 16^2 \Leftrightarrow$$

$$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{10} \in (7, 16).$$

Επομένως από την απάντηση του (γ.ι) η (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

■ ΘΕΜΑ 4_7510

Τα στίπια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_G και s_D αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B, s_G = \frac{s_A + 3s_B}{4} \text{ και } |s_D - s_A| = |s_D - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A, B παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ , που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Αν, επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1,4 \text{ και } s_A \cdot s_B = 0,45 \text{ τότε:}$$

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B .

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_G και s_D .

(Μονάδες 7)

Λύση

α) Έχουμε $|s_D - s_A| = |s_D - s_B| \Leftrightarrow (s_D - s_A = s_D - s_B \text{ ή}$

$$s_D - s_A = s_B - s_D) \Leftrightarrow$$

$$(s_A = s_B, \text{ αδύνατη, ή } s_D = \frac{s_A + s_B}{2}).$$

Τελικά, $s_D = \frac{s_A + s_B}{2}$, άρα το σπίτι της Δήμητρας

βρίσκεται στο μέσο της διαδρομής από το σπίτι της Άννας στο σπίτι του Βαγγέλη.

Ισχύει $s_A < s_D < s_B$. Για το s_T έχουμε:

$$\bullet \text{ Έστω } s_T > s_B \Leftrightarrow \frac{s_A + 3s_B}{4} > s_B \Leftrightarrow$$

$$s_A + 3s_B > 4s_B \Leftrightarrow s_A > s_B, \text{ άτοπο, άρα } s_T \leq s_B.$$

Αν $s_T = s_B$, τότε η σχέση $s_T = \frac{s_A + 3s_B}{4}$ γράφεται

$$s_B = \frac{s_A + 3s_B}{4} \Leftrightarrow 4s_B = s_A + 3s_B \Leftrightarrow s_B = s_A, \text{ άτοπο.}$$

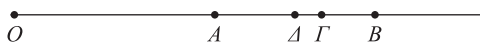
Τελικά, $s_T < s_B$.

$$\bullet \text{ Έστω } s_T > s_A \Leftrightarrow \frac{s_A + 3s_B}{4} > \frac{s_A + s_B}{2} \Leftrightarrow$$

$$2s_A + 6s_B > 4s_A + 4s_B \Leftrightarrow$$

$$6s_B - 4s_B > 4s_A - 2s_A \Leftrightarrow s_B > s_A, \text{ που ισχύει από υπόθεση, άρα } s_T > s_A.$$

Τελικά, $s_A < s_D < s_T < s_B$, οπότε ο αξόνας παίρνει τη μορφή:



β) i) Μία τέτοια εξίσωση είναι η

$$x^2 - 1,4x + 0,45 = 0.$$

ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - 1,4x + 0,45 = 0$:

$$\Delta = (-1,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,45 =$$

$$= 1,96 - 1,8 = 0,16 > 0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{1,4 \pm \sqrt{0,16}}{2} = \frac{1,4 \pm 0,4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1,4 + 0,4}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9 \\ x_2 = \frac{1,4 - 0,4}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{cases} \text{ . Οι αποστάσεις των}$$

σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη από το σχολείο (s_A και s_B αντίστοιχα) είναι οι ρίζες της εξίσωσης και, αφού $s_B > s_A$, προκύπτει ότι $s_B = 0,9 \text{ km}$ και $s_A = 0,5 \text{ km}$. Επομένως

$$s_T = \frac{0,5 + 3 \cdot 0,9}{4} = \frac{0,5 + 2,7}{4} = \frac{3,2}{4} = 0,8 \text{ km και}$$

$$s_D = \frac{0,5 + 0,9}{2} = \frac{1,4}{2} = 0,7 \text{ km.}$$

■ΘΕΜΑ 4_7515

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2x + \lambda = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda < 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ . (Μονάδες 8)

Λύση

α) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda) > 0$, αφού

$\lambda < 1$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

$$\text{β) } S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2$$

γ) i) $|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2 \text{ ή}$

$$x_1 - 2 = -x_2 - 2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 4 \text{ ή } x_1 + x_2 = 0,$$

αδύνατη λόγω του β)), άρα $x_1 - x_2 = 4$.

$$\text{ii) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2^{(+)} \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3. \text{ Για } x_1 = 3 \text{ η}$$

σχέση $x_1 + x_2 = 2$ γράφεται

$$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1.$$

$$\text{Ισχύει } P = x_1 x_2 \Rightarrow \lambda = 3 \cdot (-1) \Rightarrow \lambda = -3.$$

■ΘΕΜΑ 4_7516

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$\rho_1 = \alpha \text{ και } \rho_2 = -\frac{1}{\alpha}. \text{ (Μονάδες 10)}$$

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

Λύση

$$\text{α) } \Delta = [-(\alpha^2 - 1)]^2 - 4\alpha \cdot (-\alpha) = (\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2 =$$

$$= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$$

β) $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2 > 0$, αφού $\alpha^2 + 1 \neq 0$, για κάθε

$\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες

$$\text{άνισες } \rho_{1,2} = \frac{-[-(\alpha^2 - 1)] \pm \sqrt{(\alpha^2 + 1)^2}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha^2 - 1 \pm |\alpha^2 + 1|}{2\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm (\alpha^2 + 1)}{2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{\alpha^2 - 1 + (\alpha^2 + 1)}{2\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + 1}{2\alpha} = \alpha \\ \rho_2 = \frac{\alpha^2 - 1 - (\alpha^2 + 1)}{2\alpha} = \frac{\alpha^2 - 1 - \alpha^2 - 1}{2\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

γ) $|\rho_1 - \rho_2| = 2 \Leftrightarrow \left| \alpha - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \right| = 2 \Leftrightarrow \left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| = 2 \Leftrightarrow$

$$\left| \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha^2 + 1|}{|\alpha|} = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + 1}{|\alpha|} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 1 = 2|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha|^2 + 1 = 2|\alpha| \Leftrightarrow$$

$$|\alpha|^2 - 2|\alpha| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|\alpha| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow$$

$(\alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -1)$, δεκτές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4_7940

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2) \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης

(2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης

(1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για

οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4),

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και

$\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και (Μονάδες 5)

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Για την (1): $\alpha = 3, \beta = -14, \gamma = 8$, οπότε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 =$$

$$= 196 - 96 = 100 > 0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{14 \pm 10}{6} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14+10}{6} = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{14-10}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Για τη (2): $\alpha = 8, \beta = -14, \gamma = 3$, οπότε

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 =$$

$$= 196 - 96 = 100 > 0,$$

$$\text{άρα } x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 8} = \frac{14 \pm 10}{16} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14+10}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{14-10}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

β) Αφού ρ ρίζα της (3), θα ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$ (5).

i) Αν $\rho = 0$, τότε

$$(5) \Leftrightarrow \alpha \cdot 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0, \text{ που είναι}$$

άτοπο, γιατί $\alpha\gamma \neq 0$.

Άρα $\rho \neq 0$.

ii) Για $x = \frac{1}{\rho}$ η (4) γίνεται:

$$\gamma \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta \frac{1}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta}{\rho} + \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\rho^2} + \frac{\beta\rho}{\rho^2} + \frac{\alpha\rho^2}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma + \beta\rho + \alpha\rho^2}{\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma}{\rho^2} = 0,$$

που ισχύει από (5).



