Θέμα 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)$, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} h(x)\,dx > h(\alpha)(\beta-\alpha)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

- **i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- **ii.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- **iii.** Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f.
- **iv.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης.
- **v.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I_1=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ και $I_2=\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$.
- **vi.** Να δείξετε ότι $\int_0^{100} f(x)dx > f(0)+f(1)+\cdots+f(99)$.
- **vii.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

Θέμα 5ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $f^5(x)+f^3(x)+1=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- **i.** Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- **ii.** Να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- **iii.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.
- **iv.** Να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα και να τη βρείτε.
- **v.** Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, να βρείτε τα όρια:

  α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}f(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}$.
- **vi.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{1\}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(3, f(3))$.

- Αν $\ln\alpha \le 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha \le 1$, τότε σύμφωνα με το (στ.) η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα, άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.
- Αν $0 < \ln\alpha < \frac{1}{e} \Leftrightarrow 1 < \alpha < e^{\frac{1}{e}}$, τότε σύμφωνα με το (στ.) η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες, άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν δύο κοινά σημεία.
- Αν $\ln\alpha = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = e^{\frac{1}{e}}$, τότε σύμφωνα με το (στ.) η εξίσωση έχει μία ακριβώς ρίζα, άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο.
- Αν $\ln\alpha > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha > e^{\frac{1}{e}}$, τότε σύμφωνα με το (στ.) η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα, άρα οι γραφικές παραστάσεις δεν έχουν κοινά σημεία.

Θέμα 4ο

Α. Η h συνεχής και $\nearrow$ στο $[\alpha, \beta]$, άρα $x \ge \alpha \Rightarrow h(x) \ge h(\alpha)$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$, άρα $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta h(\alpha)dx \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta h(x)dx > h(\alpha)(\beta - \alpha)$.

Β. **i.** Πρέπει $\begin{cases} x^2 + 1 \ge 0, \text{που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ x + \sqrt{x^2+1} > 0 \quad (1) \end{cases}$

Για την (1) έχουμε $x^2 + 1 > x^2 \ge 0$, για κάθε $x \in R \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow$ $\sqrt{x^2+1} > |x| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x$, διότι $|x| \ge -x$ για κάθε $x \in R \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα το πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$.

ii. $$f'(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\text{x}+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Θέτουμε $u=\sqrt{x^2+1}+x$, οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} u=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=+\infty+(+\infty)=+\infty.$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$

Άρα το σύνολο τιμών $f(A)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=(-\infty,+\infty).$

iv. Η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y=f(x)\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=y\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=e^y\Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+1}=e^y-x\Leftrightarrow x^2+1=(e^y-x)^2\Leftrightarrow x^2+1=e^{2y}-2xe^y+x^2\Leftrightarrow$

$2xe^y=e^{2y}-1\Leftrightarrow x=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\dfrac{e^{2y}-1}{2e^y}\Leftrightarrow$

$f^{-1}(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}, x\in\mathbb{R}.$

v. $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 f'(x)dx=[f(x)]_0^1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$

$$I_2=\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx=\int_0^1(x)'\sqrt{x^2+1}dx=\left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-\int_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\sqrt{2}-\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{2}-I_2+I_1.$$

Άρα $I_2=\sqrt{2}-I_2+I_1\Leftrightarrow 2I_2=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow I_2=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$

vi. Η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα σε κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$, οπότε, σύμφωνα με το ερώτημα (Α), έχουμε:

$\int_0^1 f(x)dx > f(0)(1-0) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx > f(0).$

$\int_1^2 f(x)dx > f(1)(2-1) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx > f(1).$

.
.
.

$\int_{99}^{100} f(x)dx > f(99)(100-99) \Leftrightarrow \int_{99}^{100} f(x)dx > f(99).$

Προσθέτουμε κατά μέλη:

$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + ... + \int_{99}^{100} f(x)dx > f(0) + f(1) + ... + f(99) \Leftrightarrow$

$\int_1^{100} f(x)dx > f(0) + f(1) + ... + f(99).$

vii. Είναι $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

Άρα $E = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x)' \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx =$

$= \left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$

$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 =$

$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}-1\right) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + 1 - \sqrt{2}$ τ.μ.

Θέμα 5ο

i. $f^5(x) + f^3(x) = x - 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η f δεν είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Τότε θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και

$f(\alpha) \geq f(\beta)$ (2) έχουμε $f(\alpha) \geq f(\beta) \Rightarrow \begin{cases} f^3(\alpha) \geq f^3(\beta) \\ f^5(\alpha) \geq f^5(\beta) \end{cases} \Rightarrow$

$f^3(\alpha) + f^5(\alpha) \geq f^3(\beta) + f^5(\beta) \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha - 1 \geq \beta - 1 \Rightarrow \alpha \geq \beta$, άτοπο, αφού $\alpha < \beta$, άρα η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

ii. Θεωρούμε την $h(x) = x^5 + x^3 + 1$ $D_h = \mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty$, άρα $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $h \nearrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Έχουμε $f^5(x)+f^3(x)+1=x \Leftrightarrow h(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=h^{-1}(x)$, οπότε $f=h^{-1}$.

Άρα $f(\mathbb{R})=h^{-1}(\mathbb{R})=D_h=\mathbb{R}$.

iii. Η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα και 1–1, οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $y=f(x)$, τότε $f^5(x)+f^3(x)+1=x \Leftrightarrow y^5+y^3+1=x \Leftrightarrow$
$f^{-1}(y)=y^5+y^3+1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=x^5+x^3+1$.

iv. Για $x=1$, $f^5(1)+f^3(1)+1=1 \Leftrightarrow f^3(1)[f^2(1)+1]=0 \Leftrightarrow$

$f^3(1)=0$, αφού $f^2(1)+1\neq 0 \Leftrightarrow f(1)=0$.

Άρα το $x_0=1$ είναι ρίζα της f και, επειδή η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

v. **α.** $f(x)[f^4(x)+f^2(x)]=x-1 \underset{f(x)\neq 0}{\overset{x>1}{\Longleftrightarrow}} f(x)=(x-1)\dfrac{1}{f^4(x)+f^2(x)} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x-1}{x}\frac{1}{f^4(x)+f^2(x)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f^4(x)+f^2(x)}=1\cdot 0=0.$$

β. $$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},$$

$u=\dfrac{1}{f(x)}$, $u\to 0$, όταν $x\to+\infty$.

vi. Για $x=3$: $f^5(3)+f^3(3)-2=0$, άρα θέτοντας $f(3)=k$

προκύπτει $k^5+k^3-2=0$ και με θεώρημα Horner $k=f(3)=1$.

Παραγωγίζοντας την αρχική παίρνουμε: $[5f^4(x)+3f^2(x)]f'(x)=1 \Rightarrow$

$$f'(3)=\frac{1}{5f^4(3)+3f^2(3)}=\frac{1}{8}.$$

Τελικά $y-f(3)=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y-1=\dfrac{1}{8}(x-3) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$.

vii. $f^{-1}(2)=2^5+2^3+1=41 \Leftrightarrow f(41)=2$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ από το ερώτημα (iv).

Άρα $x\geq 1 \Rightarrow f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$, αφού η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$E=\int_1^{41}|f(x)|\,dx=\int_1^{41}f(x)dx$. Θέτουμε:

$u=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Rightarrow dx=(f^{-1}(u))'du$, για $x=1 \Rightarrow u=0$, για $x=41 \Rightarrow u=2$.