ΕΝΟΤΗΤΑ 6
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Μαθηματικές Προτάσεις

Πλοηγηθείτε: http://www.youtube.com/watch?v = MtmJ3BArAgA

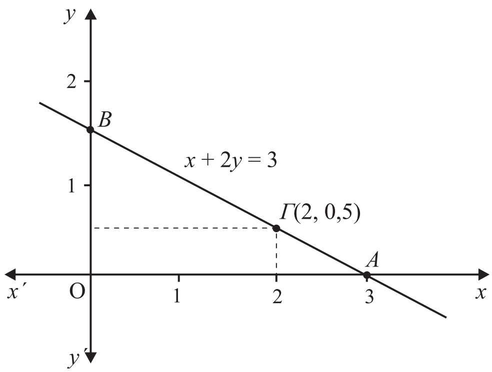
Διαβάστε: Λ. Κάρολ, *Η Αλίκη στη Χώρα των Θαυμάτων*, Εκδόσεις Πατάκη

Δείτε: *Alice in Wonderland (1951)*, Clyde Geronimi

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με δύο αγνώστους ονομάζεται **γραμμική εξίσωση**.

Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει τη γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται **λύση** της εξίσωσης.

Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ παριστάνει μια **ευθεία**.



Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, και αντίστροφα, αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

- Η ευθεία $y = \kappa$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, \kappa)$.
- Η ευθεία $x = \kappa$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$

στο σημείο $(\kappa, 0)$. Δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, καθώς στο ίδιο x αντιστοιχούν άπειρα y.

- Ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$.
- Ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$.

Ένα **σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους** ή **ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους πρώτου βαθμού** αποτελείται από δύο εξισώσεις της μορφής:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \text{ και } \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2.$$

Ένα τέτοιο σύστημα συμβολίζεται ως εξής:

$$(\Sigma)\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$$

Αναζητούμε όλα τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν συγχρόνως και τις δύο εξισώσεις, δηλαδή αναζητούμε την κοινή λύση τους, αν υπάρχει.
Όταν δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) τέτοιο ώστε να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, τότε λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

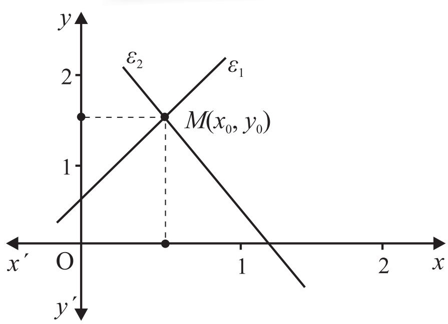
Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος της μορφής $(\Sigma)\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2 \end{cases}$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Σχεδιάζουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις ευθείες:

$$(\varepsilon_1):\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \text{ και}$$
$$(\varepsilon_2):\ \alpha_2 x + \beta_2 y = \gamma_2.$$

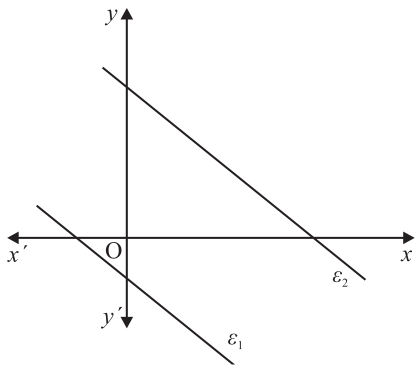
- Αν οι ευθείες **τέμνονται** σε ένα σημείο $M(x_o, y_o)$, οι συντεταγμένες του σημείου αυτού θα επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις, διότι το ση-

Τα σφάλματα κατά τη σχεδίαση δε βοηθούν στον ακριβή προσδιορισμό των λύσεων ενός συστήματος γραφικά.

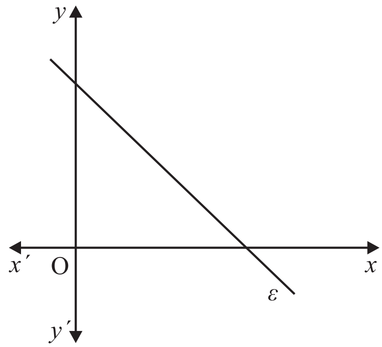


μείο αυτό είναι κοινό και των δύο ευθειών. Επομένως το ζεύγος των συντεταγμένων του σημείου αυτού αποτελεί τη **μοναδική λύση** του συστήματος, δηλαδή $(x, y) = (x_o, y_o)$.

- Αν οι ευθείες είναι **παράλληλες**, δηλαδή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε το σύστημα δεν έχει λύση, δηλαδή λέμε ότι το σύστημα είναι **αδύνατο**.



- Αν οι δύο ευθείες **ταυτίζονται**, τότε έχουν άπειρα κοινά σημεία, οι συντεταγμένες των οποίων επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις του συστήματος. Τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και λέγεται **αόριστο**.



ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΥΟ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Κάθε αλγεβρική μέθοδος για την επίλυση ενός συστήματος είναι μια διαδικασία κατά την οποία το σύστημα μετατρέπεται σε ένα άλλο σύστημα, που έχει ακριβώς την ίδια λύση, δηλαδή σε **ισοδύναμο** σύστημα. Στο τέλος της διαδικασίας καταλήγουμε στη λύση του αρχικού συστήματος. Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Απαλείφουμε τους παρονομαστές.

- Εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με την προτεραιότητα των πράξεων.
- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους, μεταφέροντας τους άγνωστους όρους στο πρώτο μέλος και τους γνωστούς στο δεύτερο μέλος κάθε εξίσωσης.
- Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων, φροντίζοντας οι ίδιοι άγνωστοι να βρίσκονται ο ένας κάτω από τον άλλον σε κάθε εξίσωση.
- Λύνουμε το σύστημα ακολουθώντας μια αλγεβρική μέθοδο επίλυσης.

Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη κάθε εξίσωσης του συστήματος με τον κατάλληλο αριθμό, ώστε να δημιουργηθούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους δύο αγνώστους, για να οδηγηθούμε στην απαλοιφή του.
- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο.
- Επιλύουμε την εξίσωση και έτσι βρίσκουμε την τιμή του ενός από τους δύο αγνώστους.
- Επιλέγουμε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος και αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε. Έτσι, βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- Καταγράφουμε τη λύση του συστήματος.

Η μέθοδος της αντικατάστασης

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο της αντικατάστασης, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Επιλύουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο. Ο άγνωστος τον οποίο προτιμάμε είναι αυτός που έχει τον μικρότερο συντελεστή.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα και δημιουργούμε εξίσωση με έναν άγνωστο.

- Επιλύουμε την εξίσωση και υπολογίζουμε την τιμή του αγνώστου.
- Αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου στην αρχική εξίσωση, υπολογίζουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Καταγράφουμε τη λύση του συστήματος.

Η μέθοδος της σύγκρισης

Για να λύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με τη μέθοδο της σύγκρισης, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Λύνουμε και τις δύο εξισώσεις του συστήματος ως προς τον ίδιο άγνωστο.
- Εφόσον τα πρώτα μέλη των εξισώσεων που δημιουργήσαμε είναι ίσα, μπορούμε να εξισώσουμε τα δεύτερα μέλη έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο.
- Επιλύουμε την εξίσωση και υπολογίζουμε την τιμή του αγνώστου.
- Κρατάμε μία από τις δύο εξισώσεις που δημιουργήσαμε στο πρώτο βήμα και αντικαθιστούμε σε αυτήν την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε. Έτσι, υπολογίζουμε την τιμή του άλλου αγνώστου.
- Καταγράφουμε τη λύση του συστήματος.

Συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων

Ένα σύστημα στο οποίο η μία από τις δύο εξισώσεις έχει άγνωστο υψωμένο σε μια δύναμη ή υπάρχει γινόμενο ή πηλίκο μεταξύ των αγνώστων, ενώ η άλλη εξίσωση είναι γραμμική, ονομάζεται **σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων**.

> Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 6.1

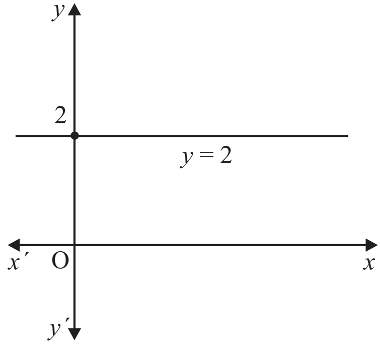
Να βρεθεί η τιμή του λ και να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία σε κάθε περίπτωση, ώστε η ευθεία $(2\lambda-1)x+(7-\lambda)y=13$ να είναι:

α. παράλληλη στον άξονα $x'x$,

β. παράλληλη στον άξονα $y'y$.

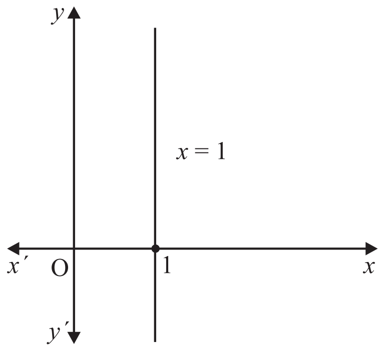
Λύση

α. Για να είναι η ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, πρέπει $2\lambda-1=0$ ή $\lambda=\frac{1}{2}$. Για αυτή την τιμή του λ η εξίσωση της ευθείας γίνεται $\left(7-\frac{1}{2}\right)y=13$ ή $\frac{13}{2}y=13$ ή $y=2$.



β. Για να είναι η ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, πρέπει $7-\lambda=0$ ή $\lambda=7$. Για αυτή την τιμή του λ η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$(2\cdot 7-1)x=13$ ή $13x=13$ ή $x=1$.



Παράδειγμα 6.2

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ και με τις τρεις μεθόδους.

Λύση

Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών	**Μέθοδος της αντικατάστασης**	**Μέθοδος της σύγκρισης**
$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}\begin{vmatrix} \\ \times(-3) \end{vmatrix}$ ή $+\begin{cases} 3x-6y=3 \\ -3x+6y=12 \end{cases}$ $3x-3x-6y+6y=3+12$ ή $0x+0y=15$ ή $0=15$. Το σύστημα είναι αδύνατο.	$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3(2y-4)-6y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 6y-12-6y=3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0y=12+3 \\ x=2y-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0y=15 \\ x=2y-4. \end{cases}$ Το σύστημα είναι αδύνατο.	$\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 3x=6y+3 \\ x=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=\dfrac{6y+3}{3} \\ x=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=2y+1 \\ x=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=2y+1 \\ 2y+1=2y+4 \end{cases}$ ή $\begin{cases} x=2y+1 \\ 1=4. \end{cases}$ Το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 6.3

Να βρεθούν οι τιμές των α και β αν το σύστημα $\begin{cases} (\alpha+5)x+y=-5 \\ \alpha x+(\beta-2)y=0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(-1,1)$.

Λύση

Το ζεύγος $(x,y)=(-1,1)$ θα επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις του συστήματος, καθώς είναι λύση του:

$$\begin{cases}(\alpha+5)\cdot(-1)+1=-5\\ \alpha\cdot(-1)+(\beta-2)\cdot 1=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-\alpha-5+1=-5\\ -\alpha+\beta-2=0\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}-\alpha=-1\\ -\alpha+\beta=2\end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases}\alpha=1\\ -1+\beta=2\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=3\end{cases}$$

Επομένως για $(\alpha,\beta)=(1,3)$ το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(x,y)=(-1,1)$.

Παράδειγμα 6.4

Να βρεθούν οι τιμές των α και β αν το σύστημα $\begin{cases}7x+2y=20\\ (\alpha-2)x+(\beta-1)y=40\end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

Λύση

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών έχουμε:

$$\begin{cases}7x+2y=20\\ (\alpha-2)x+(\beta-1)y=40\end{cases} \text{ ή } \begin{cases}7x+2y=20\\ (\alpha-2)x+(\beta-1)y=40\end{cases}\left|\begin{matrix}\times(+2)\\ \times(-1)\end{matrix}\right. \text{ ή }$$

$$+\begin{cases}14x+4y=40\\ -(\alpha-2)x-(\beta-1)y=-40\end{cases}$$

$$14x+(2-\alpha)x+4y-(\beta-1)y=0 \text{ ή } (14+2-\alpha)x+(4-\beta+1)y=0 \text{ ή }$$

$$(16-\alpha)x+(5-\beta)y=0.$$

Εφόσον το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, πρέπει $16-\alpha=0$ και $5-\beta=0$, επομένως $\alpha=16$ και $\beta=5$.

Παράδειγμα 6.5

Δίνονται τα συστήματα:

$$(\Sigma_1)\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{7}{6}\\[2mm] \dfrac{x+y}{5}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{14}{15}\end{cases} \text{ και } (\Sigma_2)\begin{cases}(\alpha-5)x+(\alpha+\beta+10)y=17\\ \alpha x+7-\beta y-11=-2\alpha x-6\beta x\end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές των α και β, αν τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Λύση

Εφόσον τα συστήματα είναι ισοδύναμα, λύνουμε το πρώτο και αντικαθιστούμε τις τιμές των x και y στο δεύτερο:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{7}{6} & \Big|\times(+6) \\ \dfrac{x+y}{5}-\dfrac{y-x}{3}=\dfrac{14}{15} & \Big|\times(+15) \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3(x+y)+2(y-x)=7 \\ 3(x+y)-5(y-x)=14 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3x+3y+2x-2y=7 \\ 3x+3y-5x+5y=14 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 5x+y=7 & \Big|\times(-8) \\ -2x+8y=14 & \Big| \end{cases} \text{ ή}$$

$$+\begin{cases} -40x-8y=-56 \\ -2x+8y=14 \end{cases} \text{ ή } x=1 \text{ και } y=2.$$

$$-42x=-42$$

Για $x=1$ και $y=2$ έχουμε:

$$\begin{cases} (\alpha-5)\cdot 1+(\alpha+\beta+10)\cdot 2=17 \\ \alpha\cdot 1+7-\beta\cdot 2-11=-2\alpha\cdot 1-6\beta\cdot 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \alpha-5+2\alpha+2\beta+20=17 \\ \alpha+7-2\beta-11+2\alpha+6\beta=0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+2\beta=2 & \Big|\times(-1) \\ 3\alpha+4\beta=4 & \Big| \end{cases} \text{ ή } +\begin{cases} -3\alpha-2\beta=-2 \\ 3\alpha+4\beta=4 \end{cases} \text{ ή } \beta=1 \text{ και } \alpha=0.$$

$$2\beta=2$$

Παράδειγμα 6.6

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=0 \\ 2x+y=-xy \end{cases}$

Λύση

Πρέπει $x\neq 0$ και $y\neq 0$. Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών στην πρώτη εξίσωση έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=0 \\ 2x+y=-xy \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=0 & \Big|\times(xy) \\ 2x+y=-xy & \Big| \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} xy\cdot\dfrac{1}{x}+xy\cdot\dfrac{4}{y}=0 \\ 2x+y=-xy \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} y+4x=0 \\ 2x+y+xy=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-4x \\ 2x+y+xy=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-4x \\ 2x-4x+x\cdot(-4x)=0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} y=-4x \\ 2x-4x-4x^2=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-4x \\ -4x^2-2x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-4x \\ -2x(x+1)=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=-4x \\ x=0 \text{ ή } x=-1 \end{cases}$$

Το $x=0$ απορρίπτεται.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x,y)=(-1,4)$.

Παράδειγμα 6.7

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x-2)+(y-1)=2 \\ x^2-y=-6 \end{cases}$

Λύση

Το σύστημα θα λυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}(x-2)+(y-1)=2 \\ x^2-y=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2\cdot\dfrac{3}{2}(x-2)+2(y-1)=2\cdot 2 \\ x^2-y=-6 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} 3(x-2)+2(y-1)=4 \\ x^2-y=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x-6+2y-2=4 \\ x^2-y=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 2y=4+8-3x \\ x^2-y=-6 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} y=6-\dfrac{3}{2}x \\ x^2-y=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=6-\dfrac{3}{2}x \\ x^2-6+\dfrac{3}{2}x=-6 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=6-\dfrac{3}{2}x \\ x^2+\dfrac{3}{2}x=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=6-\dfrac{3}{2}x \\ x\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=0 \end{cases} \text{ ή}$$

$$\begin{cases} y=6-\dfrac{3}{2}x \\ x=0 \text{ ή } x=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη $(x,y)=(0,6)$ και $(x,y)=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{33}{4}\right)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

1. Η εξίσωση $y=-2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$.
2. Η ευθεία $5x+3y=8$ διέρχεται από το σημείο $\left(-1,1\right)$.
3. Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ 2\alpha x+2\beta y=2\gamma \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.
4. Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, τότε το σύστημα των εξισώσεών τους είναι αόριστο.
5. Οι ευθείες $\varepsilon_1: 6x-2y=24$ και $\varepsilon_2: 2x+3y=19$ τέμνονται στο σημείο $\left(5,3\right)$.
6. Όταν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο, οι ευθείες που το αποτελούν είναι παράλληλες.
7. Αν για το σύστημα $\begin{cases} 3x-6y=3 \\ x-2y=-4 \end{cases}$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών, τότε προκύπτει η εξίσωση $6x=12$.
8. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,3)$ και $B(6,2)$ είναι $y=-\dfrac{1}{3}x+4$.
9. Αν για δύο αριθμούς γνωρίζουμε ότι έχουν άθροισμα 15, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 117, τότε βρίσκουμε ότι αυτοί οι αριθμοί είναι ο αριθμός 9 και ο αριθμός 6.
10. Οι πραγματικοί αριθμοί α και β, ώστε η εξίσωση $\alpha x^2+\left(\alpha+4\right)x+2\beta-4=0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και -3, είναι ίσοι με 1 και 6 αντίστοιχα.

14ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases}(x+y)\cdot(2x-y+5)=0\\ x-y=2\end{cases}$$

Θέμα 2ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: x+2y=5$, $\varepsilon_2: 3x-y=1$ και $\varepsilon_3: \left(\lambda^2-7\lambda+1\right)x+3\lambda y=1$, οι οποίες διέρχονται από το ίδιο σημείο. Εφόσον βρείτε το σημείο τομής των τριών ευθειών, να βρείτε τις τιμές του λ.

Θέμα 3ο

Κατά τη διάρκεια των φιλικών παιχνιδιών, οι Αετοί κέρδισαν το 45% των αγώνων μπάσκετ. Κατά τη διάρκεια της κανονικής περιόδου του πρωταθλήματος, οι Αετοί κέρδισαν 6 ακόμα αγώνες και έχασαν 2 αγώνες, ενώ τελειώνοντας τη σεζόν είχαν κερδίσει τους μισούς από τους αγώνες. Σε πόσους αγώνες έπαιξαν συνολικά οι Αετοί;

(*American Mathematics Contest, 2007*)

Θέμα 4ο

Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που διέρχεται από τα σημεία $A(0,3)$ και $B(1,0)$ και έχει κορυφή το σημείο $K(-1,2)$.

15ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Ένας ζωολογικός κήπος έχει ένα πλήθος από δίποδα πουλιά και ένα πλήθος από τετράποδα θηλαστικά. Σε μια επίσκεψη στον ζωολογικό κήπο, η Μαργαρίτα μέτρησε 200 κεφάλια και 522 πόδια. Πόσα από τα ζώα που μέτρησε η Μαργαρίτα ήταν δίποδα πουλιά;

(*American Mathematics Contest, 2012*)

Θέμα 2ο

Να βρεθούν οι τιμές των αριθμών α και β ώστε η εξίσωση

$\left(\alpha-\sqrt{7}\beta\right)x=2\alpha+\sqrt{7}\beta-3\sqrt{7}$ να είναι αόριστη.

Θέμα 3ο

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=14 \\ \dfrac{2y+5x}{xy}=55 \end{cases}$$

Θέμα 4ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3=\frac{z}{y}-\frac{2y}{z}(1),\ \ y^3=\frac{x}{z}-\frac{2z}{x}(2),\ \ z^3=\frac{y}{x}-\frac{2x}{y}(3).$$

(*ΕΜΕ, 2014*)

Επαναληπτικα Κριτηρια Αξιολογησης

1ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $x = 0,\overline{6}$ και $y = 2,\overline{13}$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή του πηλίκου $\dfrac{xy}{x+y}$.

β. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς: x^{-1}, $\dfrac{106}{y}$, $\sqrt{x}$, $\dfrac{x}{y}$.

Θέμα 2ο

α. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι βαθμού 3, ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $(x-3)\cdot P(x)$ και $P(x):(x-3)$;

β. Αν για το παραπάνω πολυώνυμο $P(x)$ έχουμε ότι έχει τρεις όρους, ο συντελεστής του τριτοβάθμιου όρου είναι λύση της εξίσωσης $\left[\left(7^2\right)^{\alpha}\right]^{-\alpha} = \dfrac{1}{49}$, ο σταθερός όρος είναι ο αριθμός 4 και $P(2) = 14$, να βρείτε τις πιθανές εκδοχές του πολυωνύμου.

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση $y^2 + 2x = 2y + x^2$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες.

β. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η διχοτόμος του πρώτου τεταρτημόριου να είναι πάνω από την άλλη ευθεία.

γ. Για τη γραμμική εξίσωση $x + y = 2$ να βρείτε την ελάχιστη τιμή του y, αν η μέγιστη τιμή του x είναι 5.

Θέμα 4ο

Η Άννα έχει ένα κουτί με βότσαλα που τα έχει χρωματίσει. Το 60% από αυτά είναι πράσινα και τα υπόλοιπα είναι μπλε. Αν η Άννα βάψει μπλε το 30% από τα πράσινα και το 40% από τα μπλε τα βάψει πράσινα, να υπολογίσετε το ποσοστό των πράσινων βοτσάλων.

2ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

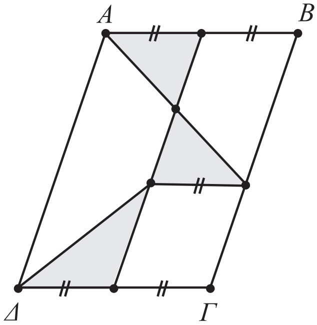
Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών έχει ετοιμάσει διαφημιστικά φυλλάδια για να διαφημίσει τα προϊόντα του. Μια τηλεόραση με διαστάσεις 20 dm και $4\sqrt{39}$ dm έχει σχεδιαστεί στο φυλλάδιο με διαγώνιο 6 cm. Να βρείτε με ποια κλίμακα σχεδιάστηκε στο φυλλάδιο η τηλεόραση.

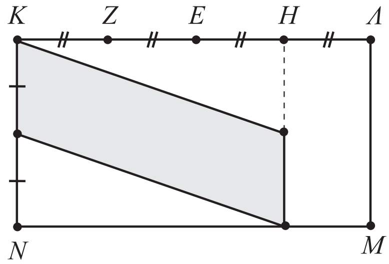
Θέμα 2ο

Για να αδειάσουμε μια πισίνα, χρησιμοποιούμε 3 σιφόνια. Αν το πρώτο σιφόνι είναι ανοιχτό για 2 ώρες, το δεύτερο είναι ανοιχτό για 3 ώρες και το τρίτο σιφόνι είναι ανοιχτό για 6 ώρες, τότε 22000 λίτρα νερό θα αδειάσουν. Αν ανοίξουμε το πρώτο σιφόνι για 3 ώρες, το δεύτερο για 2 ώρες και το τρίτο για 6 ώρες, τότε θα αδειάσουν 21000 λίτρα νερό. Αν το πρώτο και το δεύτερο σιφόνι ανοίξουν για 2 ώρες και το τρίτο για 3 ώρες, τότε 14500 λίτρα νερό θα αδειάσουν. Πόσα λίτρα νερό αδειάζουν από κάθε σιφόνι σε μία ώρα;

Θέμα 3ο

Στα παρακάτω σχήματα έχουμε $\left(ΑΒΓΔ\right) = \left(ΚΛΜΝ\right) = \alpha$ cm^2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο $ΑΒΓΔ$ είναι τα $\frac{3}{2}$ του εμβαδού της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας στο δεύτερο σχήμα.

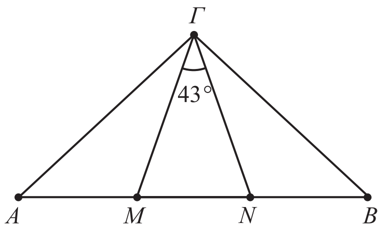




Θέμα 4ο

Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ τα σημεία $Μ$ και $Ν$ είναι πάνω στην πλευρά $ΑΒ$. Έστω ότι ισχύει $ΑΝ = ΑΓ$ και $ΒΜ = ΒΓ$. Πόσες μοίρες είναι η γωνία $Α\hat{Γ}Β$, αν $Μ\hat{Γ}Ν = 43^o$;

(*Διαγωνισμός Καγκουρό, 2013*)

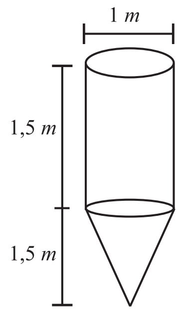


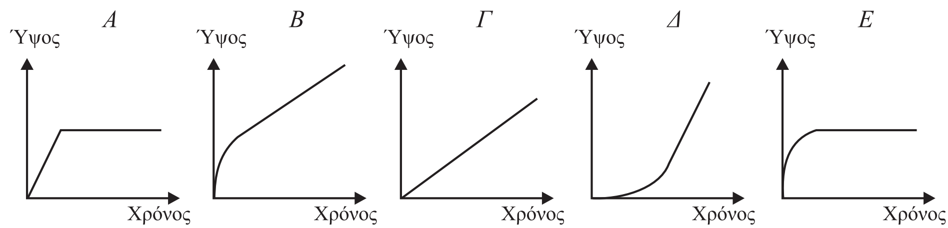
3ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αρχικά το ντεπόζιτο είναι άδειο. Μετά το γεμίζουμε με νερό με ρυθμό ένα λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει πως το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου;

(*PISA, 2003*)





Θέμα 2ο

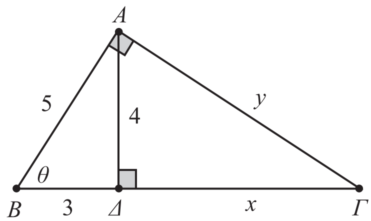
Δίνεται η παραβολή $y=(\alpha+1)x^2-\beta x+1$.

α. Αν η παραβολή διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-1,9)$, να βρείτε τις τιμές των α και β.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και K (η κορυφή της παραβολής).

Θέμα 3ο

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος.

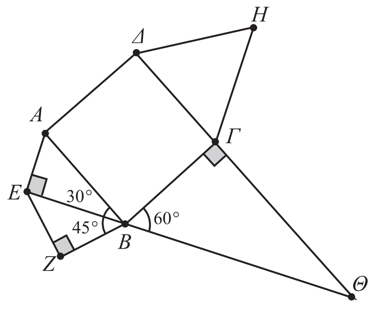


α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές των άγνωστων ευθύγραμμων τμημάτων x και y.

Θέμα 4ο

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, το $\Gamma\Delta H$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και $AE=1$ cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $EA\Delta H\Gamma\Theta BZ$.



4ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, α και β ισχύουν οι ανισότητες $x<\alpha$ και $y<\beta$. Ποιες από τις παρακάτω ανισότητες είναι αληθείς; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i. $x+y<\alpha+\beta$

ii. $x - y < \alpha - \beta$

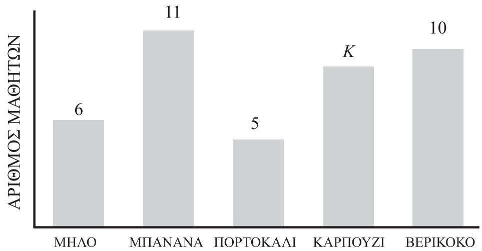
iii. $xy < \alpha\beta$

iv. $\dfrac{x}{y} < \dfrac{\alpha}{\beta}$

(*American Mathematics Contest, 2014*)

Θέμα 2ο

Στο παρακάτω ραβδόγραμμα παρουσιάζονται τα αγαπημένα φρούτα των μαθητών μιας τάξης. Κάθε μαθητής έχει μόνο ένα αγαπημένο φρούτο.



Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή, τότε η πιθανότητα το αγαπημένο του φρούτο να είναι το μήλο είναι $\dfrac{3}{20}$.

α. Να βρεθεί το K.

β. Αν τα παραπάνω δεδομένα παρουσιάζονταν σε ένα κυκλικό διάγραμμα, να βρείτε τη γωνία του τμήματος που αντιπροσωπεύει τους μαθητές που έχουν αγαπημένο φρούτο το πορτοκάλι.

γ. Αν κάποιοι καινούριοι μαθητές έρθουν στην τάξη και το αγαπημένο τους φρούτο είναι το πορτοκάλι, εξηγήστε αν η αντίστοιχη γωνία στο κυκλικό διάγραμμα θα διπλασιαστεί.

Θέμα 3ο

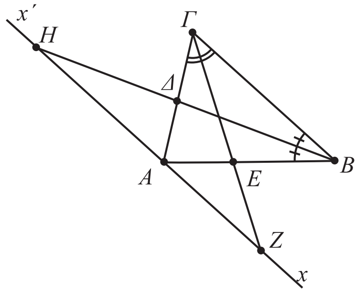
Ένας μεσίτης πουλάει οικόπεδα αξίας 120.000 €, τα οποία κοστίζουν x € το τετραγωνικό μέτρο.

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν y των οικοπέδων συναρτήσει του x.

β. Αν ένα ζευγάρι αγοράσει ένα από τα οικόπεδα προς 300 €/m^2 και έπειτα από έναν χρόνο το πουλήσει προς 450 €/m^2, πόσα χρήματα θα κερδίσει;

Θέμα 4ο

Στο διπλανό σχήμα έχουμε την ευθεία $x'x$ παράλληλη στην πλευρά $ΒΓ$. Η $x'x$ τέμνει τις διχοτόμους $ΒΔ$ και $ΓΕ$ στα σημεία $Η$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΗΖ = ΑΒ + ΑΓ$.



5ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

Στον Όμιλο Ζωγραφικής που συμμετέχουν ο Ανδρέας και ο Στέφανος θα έρθουν τρία νέα μέλη. Ο Ανδρέας και ο Στέφανος προσπάθησαν να μαντέψουν το φύλο τους. Ο Ανδρέας είπε ότι μπορεί να είναι 2 αγόρια και 1 κορίτσι, ενώ ο Στέφανος είπε ότι μπορεί να είναι όλα κορίτσια.

α. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του προβλήματος.

β. Ποια είναι η πιθανότητα ο Ανδρέας να είναι σωστός;

γ. Ποια είναι η πιθανότητα τόσο ο Ανδρέας όσο και ο Στέφανος να έχουν μαντέψει λανθασμένα;

δ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους νέους μαθητές να είναι αγόρι.

Θέμα 2ο

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ φέρνουμε τις κάθετες από τις κορυφές $ΑΖ$ και $ΓΕ$ στη $ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι το $ΑΖΓΕ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Α1. Να τοποθετήσετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς:

$$\sqrt{20}\cdot\sqrt{15},\ \sqrt{20}\cdot 15,\ \frac{201}{\sqrt{5}},\ 201\sqrt{5}.$$

Α2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{\dfrac{2^{x+4}-2\left(2^{x+1}\right)}{2\left(2^{x+3}\right)}}$.

Α3. Να βρεθούν το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του περιοδικού δεκαδικού αριθμού $1,\overline{36}$ με τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό $0,\overline{45}$.

Α4. Έστω $2^{\alpha}+2^{\beta}+2^{\gamma}=42$ με $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ και α, β, γ φυσικοί αριθμοί. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}$.

Α5. Αν $10^{\alpha}+2\cdot 10^{\beta}+3\cdot 10^{\gamma}+4\cdot 10^{\delta}=24130$ και $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\delta$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\beta}{4}+\dfrac{\gamma}{8}+\dfrac{\delta}{16}$.

Α6. Αν για τον φυσικό αριθμό ν ισχύει $\dfrac{16}{5}>\dfrac{32}{\nu}>\dfrac{8}{3}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=\left(-1\right)^{\nu}+\left[5-\left(7-1\right)\right]^{\nu}+\frac{3\cdot\left(-8\right)^{\nu}}{\left(2^{\nu}\right)^{3}}+\nu.$$

Α7. Αν ισχύει $\dfrac{56^{\nu}\cdot 3^{2\nu}}{7^{\nu}}=5184$, όπου ν φυσικός αριθμός, να συγκρίνετε τις παραστάσεις $K=\dfrac{\alpha^{\nu}\beta^{7\nu-2}\gamma^{3\nu}}{\gamma^{-\nu}\beta^{\nu}}$ και $\Lambda=\dfrac{\alpha^{2}}{\beta^{-\nu}}:\dfrac{\gamma^{1-\nu}}{\alpha^{5-\nu}}$ για $\alpha<0,\beta>1$ και $\gamma>2$.

Α8. Αν $\alpha=\dfrac{\left(10^{671}\right)^{3}}{10^{-2}},\beta=\left(10^{10^{3}}\right)^{2}\cdot 10^{15}$ και $\gamma=\dfrac{\left(10^{2}\right)^{1020}}{10^{25}}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\left(\dfrac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{3\alpha\gamma}\right)^{2015}$.

Α9. Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta+\gamma=5$ και $\dfrac{1}{\beta+\gamma}+\dfrac{1}{\gamma+\alpha}+\dfrac{1}{\alpha+\beta}=6$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Α10. Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $A=3\cdot 16^{504}\cdot 5^{2015}$ όταν αυτός γραφτεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Α11. Να βρείτε το σύνολο των τελευταίων ψηφίων ενός θετικού ακέραιου αριθμού ο οποίος είναι τετράγωνο ενός περιττού φυσικού αριθμού.

A12. Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 3.
- Το ψηφίο των δεκάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4 και κατά μία μονάδα μικρότερο από το ψηφίο των μονάδων.
- Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι κατά ένα μικρότερο από το ψηφίο των χιλιάδων του.
- Ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 11.

A13. Να βρεθούν οι πενταψήφιοι πρώτοι αριθμοί της μορφής $9434\otimes$. Στη συνέχεια να βρεθεί το πλήθος των ψηφίων του γινομένου του κάθε πενταψήφιου πρώτου αριθμού με τον εαυτό του.

A14. Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι ο αριθμητής του κλάσματος που μας δίνει την κλασματική μορφή του δεκαδικού περιοδικού αριθμού $1,\overline{46}$ και ο πραγματικός αριθμός β είναι η μικρότερη προσέγγιση δεκάτου του άρρητου αριθμού $\sqrt{10}$, να εξετάσετε αν οι αριθμοί α και 10β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

A15. Ένας θετικός ακέραιος αριθμός α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 δίνει υπόλοιπο 4. Να εξετάσετε αν ο αριθμός είναι πολλαπλάσιο του 5.

A16. Σε μια εκδήλωση παρευρίσκονται 10 παιδιά, τα οποία δεν είναι λιγότερα από δύο σε κάθε φύλο. Στα αγόρια θα μοιραστούν εξίσου 58 ποδοσφαιρικές κάρτες κατά τέτοιον τρόπο ώστε να περισσέψουν 3. Αν στα κορίτσια μοιραστούν εξίσου 42 βραχιόλια, πόσα θα πάρει κάθε κορίτσι και πόσα θα περισσέψουν;

A17. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του ακέραιου αριθμού $\nu>1$, ο αριθμός ν^4+4^ν δεν είναι πρώτος.

(*ΚΥΜΕ – Παγκύπριος Διαγωνισμός, 2010*)

A18. Έστω δύο τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί A και B. Ο B προκύπτει από τον A με εναλλαγή του πρώτου με το τρίτο ψηφίο και είναι μεγαλύτερος από τον A κατά 594. Επιπλέον, αν από τον A αφαιρέσουμε 12, προκύπτει ένας αριθμός που ισούται με 16 φορές το άθροισμα των ψηφίων του A. Ποιος είναι ο αριθμός B;

A19. Δίνεται ο ακέραιος:

$$A=\left[\left(-1\right)^{5\nu}+\left(-1\right)^{6\nu}+\left(-1\right)^{7\nu}+\left(-1\right)^{8\nu}\right]\nu^2,$$

όπου ν θετικός ακέραιος. Αν ο A είναι διαιρέτης του 32, να βρείτε τις δυνατές τιμές του ν.

A20. Γράφουμε στον πίνακα το σύνολο A, που περιέχει όλους τους ακέραιους από το 101 μέχρι και το 2012. Διαγράφουμε από το σύνολο A όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 3 και στη συνέχεια διαγράφουμε όλους τους ακέραιους που είναι πολλαπλάσια του 8. Να βρείτε πόσοι ακέραιοι θα απομείνουν στο σύνολο A.

(*ΕΜΕ, 2012*)

A21. Ο τριψήφιος αριθμός $\overline{xyz}$ διαιρείται με το 2, ο τριψήφιος $\overline{yxz}$ διαιρείται με το 3 και ο τριψήφιος $\overline{xzy}$ διαιρείται με το 5. Επίσης ο τριψήφιος $\overline{zxy}$ έχει παράγοντα τον αριθμό 29. Να βρεθεί ο τριψήφιος αριθμός $\overline{xyz}$.

A22. Αν οι αριθμοί 2521 και 456 διαιρεθούν με τον αριθμό α, δίνουν υπόλοιπο τον αριθμό 16. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του αριθμού α.

A23. Ένας τριψήφιος αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 2. Σε μια ατελή διαίρεση του τριψήφιου αριθμού α με τον αριθμό 7, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 7 του οκταπλάσιου του υπολοίπου. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του αριθμού α.

A24. Έχουμε έναν αριθμό $\alpha = 680\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ν ώστε ο αριθμός α να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

A25. Να βρείτε όλα τα δυνατά αθροίσματα των ψηφίων ενός τριψήφιου αριθμού $\overline{\alpha\beta\gamma}$, ώστε ο αριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\beta\gamma\alpha}+\overline{\gamma\alpha\beta}$ να είναι διαιρετός με τον αριθμό 7.

B. Αλγεβρικές Παραστάσεις

B1. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\sqrt{9-\sqrt{17}}-\sqrt{9+\sqrt{17}}$.

B2. Αν ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\beta=\dfrac{1}{2^{-3}}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}.$$

B3. Αν $\alpha\delta=\beta\gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}\right)^3=\frac{\beta^3}{\delta^3}.$$

B4. Αν ισχύει η σχέση

$$\frac{x}{y-\omega}+\frac{y}{\omega-x}+\frac{\omega}{x-y}=0$$

για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω τέτοιους ώστε $x\neq y\neq \omega$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$\frac{x}{(y-\omega)^2}+\frac{y}{(\omega-x)^2}+\frac{\omega}{(x-y)^2}.$$

B5. Αν $\alpha x+\beta y=1$ και $\beta x-\alpha y=1$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+$$
$$+(\alpha^2+\beta^2-1)(x^2+y^2-1).$$

B6. Αν ισχύει ότι $5\kappa + 4\lambda = 1$ και $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 2$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\frac{\alpha^6 - \beta^6}{25\kappa^2 - 16\lambda^2} \cdot \frac{4\lambda - 5\kappa}{\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right)}.$$

B7. Αν ισχύει ότι $2\alpha + 6 = \sqrt{5} + 1$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\frac{\alpha - 3}{\left(\alpha + 5\right)^2}\left(\frac{\alpha}{2\alpha - 6} + \frac{3,5\alpha + 12,5}{\alpha^2 - 9}\right).$$

B8. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{1}{2015 \cdot 2016} - \frac{2}{2015 \cdot 2016 \cdot 2017} - \frac{1}{2016 \cdot 2017}.$$

B9. Να μετατρέψετε την τιμή της παράστασης σε ανάγωγο κλάσμα:

$$A = \frac{10^{2015} - 5^{2014}}{10^{4030} + 5^{4028}} \cdot \frac{2\left(10^{2015} + 5^{2014}\right)}{2015} \cdot \frac{1015\left(10^{4030} + 25^{2014}\right)}{10^{4030} - 5^{4028}}.$$

B10. Ποιος είναι ο πιο μικρός φυσικός αριθμός N με την ιδιότητα ο $\left(2^2 - 1\right)\left(3^2 - 1\right)\left(4^2 - 1\right)\cdots\left(N^2 - 1\right)$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού;

(*Διαγωνισμός Καγκουρό, 2009*)

B11. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:
$\kappa(x) = \left(x + 2\right)\left(x + 10\right)\left(x + 3\right)\left(x + 9\right) + \nu^2$, όπου x πραγματικός αριθμός και ν θετικός πραγματικός. Να υπολογίσετε τον θετικό πραγματικό ν ώστε η παράσταση να είναι τέλειο τετράγωνο.

B12. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η παράσταση

$$A = 28\alpha^2 + \left(63 + \sqrt{5}\right)\beta^2 - 84\alpha\beta - 2\sqrt{5}\beta + \sqrt{5}$$

παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

B13. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ν ο αριθμός:

$$K(\nu) = \frac{\nu^2 + 8\nu - 1}{\left(\nu + 4 + \sqrt{2}\right)\left(\nu + 4 - \sqrt{2}\right)\left(\nu + 4\right)^2 - 15}$$

δεν είναι ακέραιος.

B14. Να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου $4x^3y$, αν για τους θετικούς ακέραιους x και y ισχύει η σχέση:

$$4x^2y^2 + 76x^2 = 868 - 10y^2.$$

B15. Έστω $x \neq 1$, $y \neq 1$ και $x \neq y$. Αν ισχύει η σχέση $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y}$, να αποδείξετε ότι $\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{zx - y^2}{1 - y} = x + y + z.$

B16. Αν $x + y + z = 13$, $xyz = 72$ και $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x^2 + y^2 + z^2$.

B17. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^7+\beta x^3+\gamma x-7$, όπου α, β, γ σταθεροί όροι. Αν $P(-5)=5$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή του $P(5)$.

B18. Να υπολογίσετε τις τιμές των A, B ώστε η ισότητα $\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+4}=\frac{10x+13}{x^2-x-20}$ να είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς $x>2000$.

B19. Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε, αν το $P(x)$ διαιρεθεί με το $x-19$, να δίνει υπόλοιπο 99, ενώ, αν το $P(x)$ διαιρεθεί με το $x-99$, να δίνει υπόλοιπο 19. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-19)(x-99)$.

(*AJHSME, 1999*)

B20. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=\alpha(x-1)(x-2)(x-3)(x-\rho)$, όπου α, ρ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν $P(4)=12$ και $P(5)=144$, να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $P(2010)$.

(*ΚΥΜΕ – Παγκύπριος Διαγωνισμός, 2010*)

Γ. Εξισώσεις – Ανισώσεις – Προβλήματα

Γ1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
$A=\left[(1,25)^5(1,25)^4\right]:\left[(1,25)^2(1,25)^6\right]$ και
$B=-\left[y(x-3)-x(y+2)\right]-3(y+5)-$
$-5(x+4)$.
Στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση $A\le B$.

Γ2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-(-1)^4}:\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^3}+\frac{x}{2} \text{ και}$$

$B=199\cdot 5^{-4}-3,8\cdot 5^{-4}+$
$+11\cdot 5^{-4}-\left(-x+206,2\cdot 5^{-4}\right)$.

Να προσδιορίσετε την τιμή του x, αν $A-B=0$.

Γ3. Δίνονται τα πολυώνυμα:
$P(x)=-x^3+7x+6$ και
$Q(x)=x^3+5x^2+8x+4$.

α. Να γράψετε τα πολυώνυμα ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου βαθμού.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2}{3}(1-x)$.

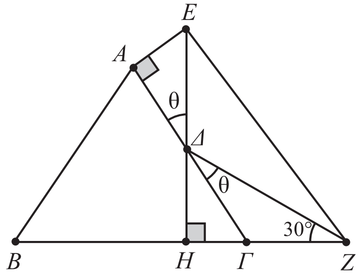
Γ4. Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$-|-2x+8|\ge 0 \text{ και } -2\le\frac{\frac{x}{2}+1}{2}-1\le 3+\frac{x}{2}.$$

I12. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση $ημ^3 Β - ημ^2 ΑημΒ = ημ^2 ΑημΓ - ημ^3 Γ$, να αποδείξετε ότι $\hat{B} + \hat{Γ} = 120^o$.

I13. Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει η σχέση:
$\dfrac{1}{α+β} - \dfrac{1}{α+β+γ} = \dfrac{2}{α+β+γ} - \dfrac{1}{β+γ}$, να αποδείξετε ότι $4συν^2 Β + 2συνΒ - 2 = 0$.

I14. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι το σημείο $Δ$ είναι το μέσο της πλευράς $ΑΓ = β$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, $Δ\hat{Α}Ε = 90^o$, η $ΔΕ$ είναι κάθετη προς τη $ΒΓ$, $Α\hat{Δ}Ε = Γ\hat{Δ}Ζ = θ$ και $Γ\hat{Ζ}Δ = 30^o$.



α. Να βρείτε τη γωνία $\hat{θ}$.
β. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΕΖ$ συναρτήσει του $β$.

(*ΕΜΕ, 2010*)

I15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$ και $\hat{Α} = 30^o$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $ΑΓΔ$ με $Α\hat{Δ}Γ = 90^o$. Η μεσοκάθετος της πλευράς $ΑΓ$ τέμνει την $ΑΓ$ στο μέσο $Κ$, την $ΑΒ$ στο σημείο $Λ$ και την προέκταση της πλευράς $ΒΓ$ στο σημείο $Μ$. Αν $ΑΔ = α$, να υπολογίσετε συναρτήσει του $α$:
α. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΚΛ$.
β. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΜ$ και το μήκος της πλευράς $ΒΓ$.

(*ΕΜΕ, 2014*)

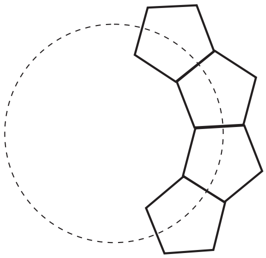
Κ. Μέτρηση Κύκλου

Κ1. Αν $α$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού πενταγώνου, $β$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού εξαγώνου, $γ$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού οκταγώνου και $δ$ είναι οι άξονες συμμετρίας ενός κανονικού επταγώνου και ισχύει η σχέση $αβ + 2p = γδ$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός p είναι πρώτος.

Κ2. Ένα πάτωμα έχει στρωθεί με πλακάκια που έχουν το σχήμα κανονικού πολυγώνου. Αν το πλακάκι βγει από το πάτωμα και περιστραφεί κατά 50^o, τότε μπορεί να τοποθετηθεί ακριβώς ξανά στην αρχική του θέση στο πάτωμα. Να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος πλευρών που μπορεί να έχει το πολύγωνο.

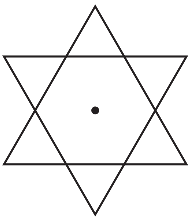
Κ3. Αν το άθροισμα όλων των γωνιών εκτός από μία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 1650^o, πόσο είναι το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου;

Κ4. Ο Ευκλείδης κρατά μερικά κανονικά πεντάγωνα, τα οποία είναι όλα ίδια μεταξύ τους. Τα τοποθετεί το ένα δίπλα στο άλλο για να φτιάξει ένα κυκλικό σχήμα. Η παρακάτω εικόνα δείχνει μέρος της κατασκευής του. Πόσα πεντάγωνα θα χρειαστεί για την κατασκευή;



(*Διαγωνισμός Καγκουρό, 2013*)

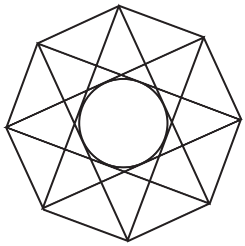
Κ5. Έχουμε δύο ίσα ισόπλευρα τρίγωνα με το ίδιο κέντρο, που σχηματίζουν ένα αστέρι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η τομή τους είναι ένα κανονικό εξάγωνο με εμβαδόν 60 cm^2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ενός από τα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα.



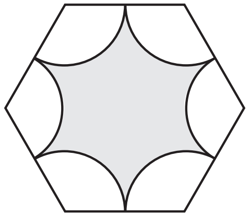
(Υπόδειξη: Κέντρο τριγώνου θεωρείται το κέντρο συμμετρίας του.)

Κ6. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ένα κανονικό εξάγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι 5, να υπολογίσετε το εμβαδόν του κανονικού εξαγώνου.

Κ7. Έχουμε ένα κανονικό οκτάγωνο πλευράς 12 cm, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του κύκλου ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο μικρό εσωτερικό οκτάγωνο, και του τετραγώνου που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο.



Κ8. Δίνεται ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά 6 cm. Με κέντρο τις κορυφές του εξαγώνου σχεδιάζουμε τόξα με ακτίνα 3, δημιουργώντας κυκλικούς τομείς, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

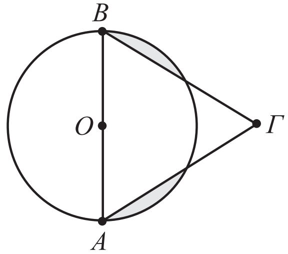


(*American Mathematics Contest, 2014*)

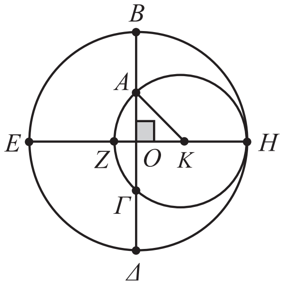
Κ9. Σε έναν κύκλο $(O,12)$ εγγράφουμε έξι ίσους μικρότερους κύκλους έτσι ώστε να εφάπτονται στην περιφέρεια του αρχικού κύκλου. Κάθε μικρός κύκλος εφάπτεται εξωτερικά με δύο άλλους. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας των έξι μικρών κύκλων.

K10. Ένας κύκλος με ακτίνα 4 cm είναι εγγεγραμμένος στο εσωτερικό ενός ισόπλευρου τριγώνου. Το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ του κύκλου και του τριγώνου είναι $\sqrt{3}\alpha - \pi\beta$ cm^2. Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha + \beta$.

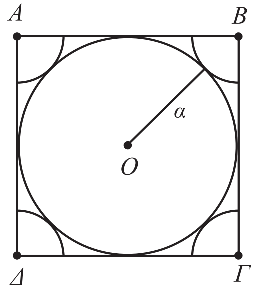
K11. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και διάμετρο 10 cm και ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



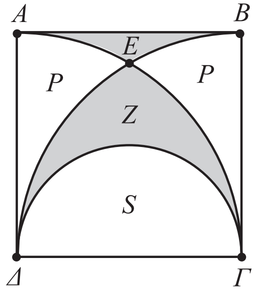
K12. Δύο κύκλοι (O, R) και (K, r) εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο H, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, με $AB = 6$, $EZ = 8$ και $\Gamma\Delta = 6$. Αν $B\Delta$ είναι η διάμετρος του μεγάλου κύκλου, να υπολογίσετε το μήκος του καμπυλόγραμμου σχήματος $HBE\Delta H\Gamma ZAH$.



K13. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 4 και τα τεταρτοκύκλια στο εσωτερικό του με κέντρα τις κορυφές του και ίσες ακτίνες $\rho = 1$. Θεωρούμε τον κύκλο (O, α), όπου O είναι το κέντρο του τετραγώνου, ο οποίος εφάπτεται στα τεταρτοκύκλια. Να συγκρίνετε τα μήκη του μεικτόγραμμου σχήματος και του κύκλου.

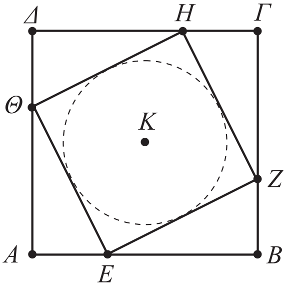


K14. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 2 cm. Τα τεταρτοκύκλια $A\Gamma$ και $B\Delta$ έχουν κέντρα τις κορυφές Δ και Γ αντίστοιχα και ακτίνα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$, το οποίο είναι επίσης διάμετρος του ημικυκλίου $\Gamma\Delta$. Να βρείτε ποια από τις επιφάνειες E και Z έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.



K15. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και μέσα σε αυτό εγγεγραμμένο άλλο τετράγωνο $EZH\Theta$ πλευράς 5 cm. Αν γνωρίζετε ότι
$AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = \Theta E - 2$, να υπολογίσετε τον λόγο του εμβαδού του τριγώνου

ΔΘΗ προς το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου (K,ρ).



Κ16. α. Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά $40\sqrt{2}$ μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

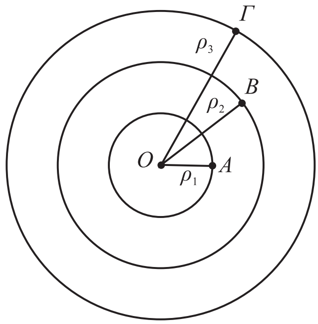
β. Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μια κυκλική περιοχή του, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι ώστε καμία περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

γ. Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση του ερωτήματος β;

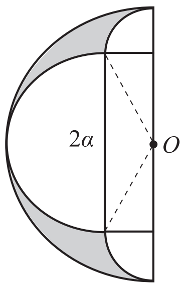
δ. Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι ώστε καμία περιοχή του κήπου να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

(*Πανελλήνιες Εξετάσεις, 1999*)

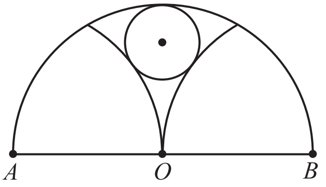
Κ17. Έχουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους $(O,\rho_1),(O,\rho_2),(O,\rho_3)$ με $\rho_3>\rho_2>\rho_1>0$. Αν ισχύει ότι $\rho_3+\rho_2-\rho_1=\rho_2+\rho_1$ και $2\rho_2=3\rho_1$, να βρείτε τον λόγο των εμβαδών του μεγαλύτερου δακτύλιου που σχηματίζεται προς τον μικρότερο δακτύλιο.



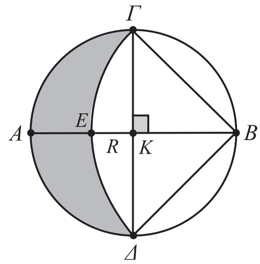
Κ18. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ημικύκλιο και μέσα σε αυτό ένα ορθογώνιο με μήκος $\frac{\alpha}{2}$ και πλάτος 2α, ένα ημικύκλιο και δύο τεταρτοκύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



Κ19. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ημικύκλιο διαμέτρου 2 cm. Με κέντρα τα άκρα του ημικυκλίου A, B και ακτίνες ίσες με 1 cm γράφουμε τόξα στο εσωτερικό του ημικυκλίου. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου στο εσωτερικό του ημικυκλίου που εφάπτεται στο ημικύκλιο και στα δύο τόξα.

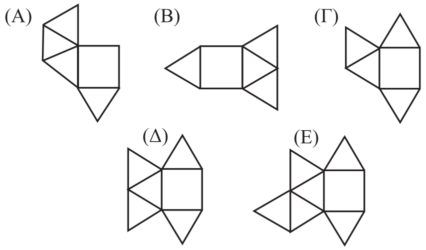


K20. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε έναν κύκλο ακτίνας 5 cm. Οι διάμετροι $AB, \Gamma\Delta$ είναι κάθετες. Με κέντρο το B γράφουμε τόξο $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.

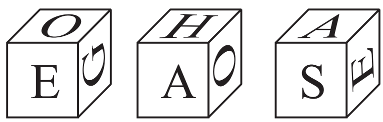


Λ. Γεωμετρικά Στερεά – Μέτρηση Στερεών

Λ1. Ποιο από τα παρακάτω αναπτύγματα αντιστοιχεί σε μια τετραγωνική πυραμίδα;

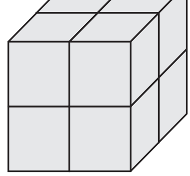


Λ2. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τρεις όψεις του ίδιου κύβου. Ποιο γράμμα βρίσκεται στην απέναντι έδρα από αυτήν που βρίσκεται το γράμμα A;



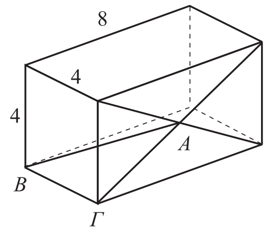
Λ3. Ένα πρίσμα έχει 2015 έδρες. Πόσες ακμές έχει το πρίσμα αυτό;

Λ4. Ο Γιάννης και ο Δημήτρης είχαν από έναν ολόιδιο κύβο. Ο Γιάννης έβαψε το εξωτερικό μέρος του δικού του κύβου. Ο Δημήτρης πρώτα έκοψε με τρεις κοψιές τον δικό του κύβο για να φτιάξει οκτώ μικρότερα κυβάκια, και μετά έβαψε το εξωτερικό μέρος των οκτώ μικρών κύβων. Πόσες φορές περισσότερη μπογιά χρειάστηκε ο Δημήτρης από τον Γιάννη;

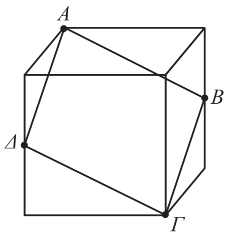


(*Διαγωνισμός Καγκουρό, 2009*)

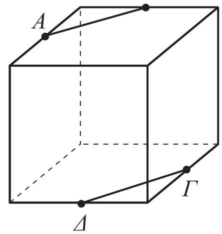
Λ5. Στο σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 8, 4, 4. Το σημείο A είναι το σημείο τομής των διαγωνίων μιας από τις μη τετράγωνες έδρες. Το σημείο B είναι μία από τις κορυφές της έδρας που βρίσκεται απέναντι από αυτήν που ανήκει το σημείο A. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.



Λ6. Ένα ζευγάρι από απέναντι κορυφές και ένα ζευγάρι μέσων των ακμών ενός κύβου ενώνονται, όπως φαίνεται στο σχήμα, και σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο. Αν ο κύβος έχει ακμή α, να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

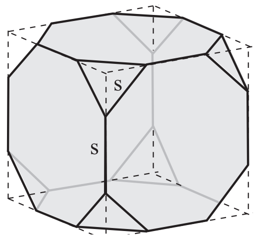


Λ7. Στον παρακάτω κύβο τα σημεία A, B, Γ, Δ είναι μέσα των αντίστοιχων ακμών του κύβου. Ένα επίπεδο διέρχεται από τα ευθύγραμμα τμήματα AB, $\Gamma\Delta$ και χωρίζει τον κύβο σε ένα τμήμα του οποίου η επιφάνεια είναι $\sqrt{6}$ cm^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας ολόκληρου του κύβου.



Λ8. Να υπολογίσετε τον όγκο μιας πυραμίδας που η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά 2 cm.

Λ9. Στον παρακάτω κύβο ακμής 2 cm έχουμε κόψει τις γωνίες του κατά ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Στο σχήμα που δημιουργείται οι μεγάλες έδρες του είναι κανονικά οκτάγωνα.

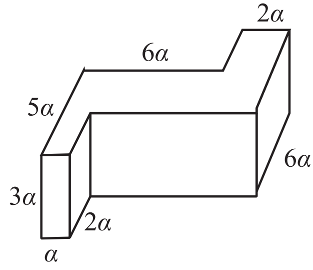


α. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών του κανονικού οκταγώνου.

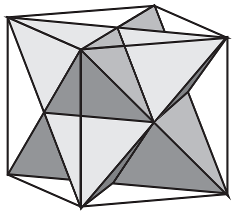
β. Να υπολογίσετε τον όγκο του σχήματος συναρτήσει του ύψους υ κάθε τριγωνικής πυραμίδας.

Λ10. Ένα ημικύκλιο διαμέτρου 12 cm χρησιμοποιείται για τη δημιουργία ενός κώνου έτσι ώστε τα άκρα του ημικυκλίου να ενωθούν κατά τη δίπλωση. Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.

Λ11. Να υπολογίσετε τον όγκο του παρακάτω στερεού.

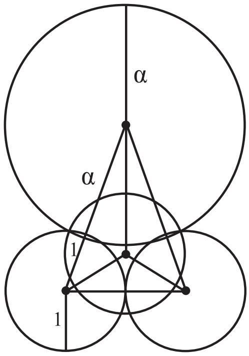


Λ12. Δύο ξεχωριστά κανονικά τετράεδρα έχουν τις κορυφές τους πάνω στις κορυφές ενός κύβου με ακμή 1. Να υπολογίσετε τον όγκο του σχήματος που δημιουργείται από την τομή των τετράεδρων.



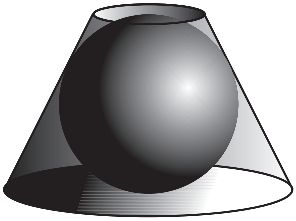
(*American Mathematics Contest, 2011*)

Λ13. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τέσσερις σφαίρες. Οι τρεις σφαίρες της βάσης εφάπτονται ανά δύο και έχουν ακτίνα 1 cm. Αν το ύψος της πυραμίδας που δημιουργείται εσωτερικά είναι $\frac{\sqrt{69}}{3}$ cm, να υπολογίσετε τον όγκο της μεγάλης σφαίρας.



Λ14. Ένας κύλινδρος με διάμετρο βάσης ίση με το ύψος του είναι εγγεγραμμένος μέσα σε έναν κώνο. Ο κώνος έχει διάμετρο βάσης 10 cm και ύψος 12 cm. Ο άξονας των δύο στερεών συμπίπτει. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

Λ15. Μια σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε έναν κόλουρο κώνο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο όγκος του κόλουρου κώνου είναι διπλάσιος από τον όγκο της σφαίρας. Ποιος είναι ο λόγος της ακτίνας της κάτω βάσης του κόλουρου κώνου προς την ακτίνα της πάνω βάσης του κόλουρου κώνου; (Δίνεται ότι $O_{\text{κόλουρου κώνου}} = \frac{1}{3}\pi \cdot \upsilon \cdot \left(R^2 + r^2 + Rr\right)$.)



(*American Mathematics Contest, 2014*)