β) Πρέπει $\beta\delta-\beta\gamma\neq 0 \Leftrightarrow \beta\left(\delta-\gamma\right)\neq 0 \Leftrightarrow$

$\left(\beta\neq 0 \text{ και } \delta\neq\gamma\right)$, που ισχύει. Έχουμε:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\cdot\gamma+\beta\gamma}{\beta\cdot 5\gamma-\beta\gamma}=$$

$$=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{5\beta\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1.$$

ΘΕΜΑ 2_1080

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$. (*Μονάδες 12*)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}.$$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $\dfrac{4x+5y}{x-4y}=-2 \overset{x\neq 4y}{\Longleftrightarrow} 4x+5y=-2\left(x-4y\right)\Leftrightarrow$

$4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 3y=6x \Leftrightarrow y=2x$

β) $A=\dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}\overset{y=2x}{=\!=}\dfrac{2x^2+3\left(2x\right)^2+x\left(2x\right)}{x\left(2x\right)}=$

$$=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

ΘΕΜΑ 2_3874

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha\neq\beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (*Μονάδες 13*)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=\frac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\cdot\left(\alpha\beta\right)^{25}}$$ (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta=\alpha\beta^2+\alpha \Leftrightarrow \alpha^2\beta-\alpha\beta^2=$

$=\alpha-\beta \Leftrightarrow \alpha\beta\left(\alpha-\beta\right)=\alpha-\beta \overset{\substack{\alpha\neq\beta\Leftrightarrow\\ \alpha-\beta\neq 0}}{\Longleftrightarrow}$

$\alpha\beta=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\Leftrightarrow \alpha\beta=1$, άρα οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) $K=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\cdot\left(\alpha\beta\right)^{25}}=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot\alpha^{25}\cdot\beta^{25}}=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{23}\cdot\beta^{25}}=$

$$=\frac{\alpha^{22}}{\alpha^{23}}\cdot\frac{\beta^{24}}{\beta^{25}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=1$$

■

ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_486

Αν $0<\alpha<1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3<\alpha$, (*Μονάδες 13*)

β) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$ (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $\alpha^3<\alpha \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha<0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha^2-1\right)<0 \Leftrightarrow$

$\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha+1\right)<0$. Από τη σχέση $0<\alpha<1$ έχουμε $0<\alpha$ και $0<\alpha \Rightarrow 1<\alpha+1 \overset{0<1}{\Rightarrow} 0<\alpha+1$ και $\alpha<1 \Rightarrow \alpha-1<0$. Από τον κανόνα προσήμων του πολλαπλασιασμού προκύπτει $\alpha\left(\alpha-1\right)\left(\alpha+1\right)<0$.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε $\alpha^3<\alpha$. Επίσης,

$0<\alpha \Rightarrow 0<\alpha^3$ και $0<\alpha<1 \Rightarrow \dfrac{1}{\alpha}>1$.

Άρα οι αριθμοί διατάσσονται ως εξής:

$0<\alpha^3<\alpha<1<\dfrac{1}{\alpha}$.

ΘΕΜΑ 2_487

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

(*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:
$x^2+y^2-2x+6y+10=0.$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+6y+9\right)=$

$=x^2+y^2-2x+6y+10$

β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$

$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=0\Leftrightarrow$

$\left(x-1=0 \text{ και } y+3=0\right)\Leftrightarrow\left(x=1 \text{ και } y=-3\right)$

ΘΕΜΑ 2_506

Αν $2\le x\le 3$ και $1\le y\le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (*Μονάδες 5*)

β) $2x-3y$ (*Μονάδες 10*)

γ) $\dfrac{x}{y}$ (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\left.\begin{matrix}2\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}3\le x+y\le 5$

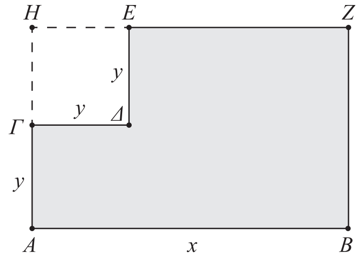
β) $\left.\begin{matrix}2\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{matrix}\right\}\underset{\cdot(-3)}{\overset{\cdot 2}{\Rightarrow}}\left.\begin{matrix}4\le 2x\le 6\\ -6\le -3y\le -3\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}-2\le 2x-3y\le 3$

γ) $\left.\begin{matrix}2\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{matrix}\right\}\underset{1,y,2>0}{\Longrightarrow}\left.\begin{matrix}2\le x\le 3\\ \dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{y}\le 1\end{matrix}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}1\le\dfrac{x}{y}\le 3$

ΘΕΜΑ 2_1092

Από το ορθογώνιο *ΑΒΖΗ* αφαιρέθηκε το τετράγωνο *ΓΔΕΗ* πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος *ΕΖΒΑΓΔ* που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi=2x+4y$



(*Μονάδες 10*)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Από το σχήμα έχουμε $EZ=x-y$ και $ZB=2y$, άρα η περίμετρος είναι
$\Pi=AB+BZ+ZE+E\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma A=$
$=x+2y+x-y+y+y+y=2x+4y.$

β) Από τις ανισοτικές σχέσεις που δίνονται έχουμε

$5<x<8\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}2\cdot 5<2x<2\cdot 8\Leftrightarrow 10<2x<16\ \left(1\right)$

$1<y<2\overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow}4\cdot 1<4y<4\cdot 2\Leftrightarrow 4<4y<8\ \left(2\right).$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις $\left(1\right)$, $\left(2\right)$ και έχουμε $10+4<2x+4y<16+8\Leftrightarrow 14<\Pi<24.$

ΘΕΜΑ 2_1541

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4\le x\le 7$ και $2\le y\le 3$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (*Μονάδες 10*)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Το ορθογώνιο με διαστάσεις x και y έχει περίμετρο $\Pi=2x+2y=2\left(x+y\right)$.

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις της υπόθεσης και έχουμε

$4+2 \le x+y \le 7+3 \Leftrightarrow 6 \le x+y \le 10 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$2\cdot 6 \le 2(x+y) \le 2\cdot 10 \Leftrightarrow 12 \le \Pi \le 20.$

β) Το νέο ορθογώνιο έχει διαστάσεις $x-1$ και $3y$ και θα έχει νέα περίμετρο

$\Pi' = 2(x-1)+2(3y) = 2x-2+6y = 2x+6y-2.$

Έχουμε

$4 \le x \le 7 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 4 \le 2x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14 \ (1)$

$2 \le y \le 3 \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} 6\cdot 2 \le 6y \le 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18 \ (2).$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και έχουμε

$8+12 \le 2x+6y \le 14+18 \Leftrightarrow 20 \le 2x+6y \le 32 \overset{-2}{\Leftrightarrow}$

$20-2 \le 2x+6y-2 \le 32-2 \Leftrightarrow 18 \le \Pi' \le 30.$

ΘΕΜΑ 2_3852

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$ (*Μονάδες 12*)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $-4 \le \beta \le -3 \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 8 \ge -2\beta \ge 6 \Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8$

Έχουμε $\left.\begin{matrix} 2 \le \alpha \le 4 \\ 6 \le -2\beta \le 8 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 8 \le \alpha - 2\beta \le 12.$

β) $\left.\begin{matrix} 2 \le \alpha \le 4 \\ 8 \le \alpha - 2\beta \le 12 \end{matrix}\right\} \xRightarrow[(\cdot)]{\text{όλοι οι όροι θετικοί}}$

$2\cdot 8 \le \alpha(\alpha - 2\beta) \le 4\cdot 12 \Rightarrow 16 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 48$

ΘΕΜΑ 2_3870

Δίνονται οι παραστάσεις:

$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι:

$K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

(*Μονάδες 3*)

β) Να δείξετε ότι: $K \ge \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(*Μονάδες 10*)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3-\beta) =$

$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$

$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$

$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

β) $K - \Lambda = (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 \ge 0$, ως άθροισμα μη αρνητικών όρων, άρα $K \ge \Lambda$.

γ) $K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ \alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 3 \end{cases}.$

ΘΕΜΑ 2_4299

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$ (*Μονάδες 12*)

β) $x^2 + y^2$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Ισχύει $3 \le x \le 5 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -3 \ge -x \ge -5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3$

$\left.\begin{matrix} -2 \le y \le -1 \\ -5 \le -x \le -3 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -7 \le y - x \le -4$

β) Βρίσκουμε τις ακραίες τιμές των x^2 και y^2:

$3 \le x \le 5 \overset{3,x,5>0}{\Longleftrightarrow} 3^2 \le x^2 \le 5^2 \Leftrightarrow 9 \le x^2 \le 25 \ (1)$

$-2 \le y \le -1 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} 2 \ge -y \ge 1 \Leftrightarrow 1 \le -y \le 2 \overset{1,-y,2>0}{\Longleftrightarrow}$

$1^2 \le (-y)^2 \le 2^2 \Leftrightarrow 1 \le y^2 \le 4 \ (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow \left.\begin{matrix} 9 \le x^2 \le 25 \\ 1 \le y^2 \le 4 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 10 \le x^2 + y^2 \le 29$

ΘΕΜΑ 2_7519

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ (*Μονάδες 12*)

β) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 + \alpha\dfrac{4}{\alpha} \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2 \geq 0,$ που ισχύει.

β) Η σχέση $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ (1) ισχύει για κάθε $\alpha > 0$.

Άρα ισχύει και αν όπου α βάλουμε το $\beta > 0$, οπότε $\beta + \dfrac{4}{\beta} \geq 4$ (2). Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1) και (2) (όλοι οι όροι είναι θετικοί), παίρνουμε $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16.$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_504

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2$.

(*Μονάδες 15*)

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\dfrac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2 \Leftrightarrow \alpha + \dfrac{1}{\alpha} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{\alpha^2}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2\alpha}{\alpha} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha} \leq 0 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 \geq 0,$ που ισχύει.

β) $|\alpha| + \left|\dfrac{1}{\alpha}\right| \geq 2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} -\alpha - \dfrac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2,$

που ισχύει από το (α).

ΘΕΜΑ 2_509

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι:

$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (*Μονάδες 15*)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{|\alpha|^2}{|\alpha||\beta|} + \dfrac{|\beta|^2}{|\alpha||\beta|} - \dfrac{2|\alpha||\beta|}{|\alpha||\beta|} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{|\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2}{|\alpha||\beta|} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(|\alpha| - |\beta|)^2}{|\alpha||\beta|} \geq 0,$

που ισχύει.

β) Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η ισότητα ισχύει για $\dfrac{(|\alpha| - |\beta|)^2}{|\alpha||\beta|} = 0 \Leftrightarrow |\alpha| - |\beta| = 0 \Leftrightarrow$

$|\alpha| = |\beta| \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta.$

Άρα η ισότητα ισχύει όταν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι ίσοι ή αντίθετοι.

ΘΕΜΑ 2_996

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$ (*Μονάδες 12*)

β) $0 < A < 4$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $1 < x \Leftrightarrow 0 < x-1 \Leftrightarrow |x-1| = x-1$ και

$y < 3 \Leftrightarrow y-3 < 0 \Leftrightarrow |y-3| = 3-y$.

Άρα $A = x-1+3-y = x-y+2$.

β) $\left.\begin{matrix} 1 < x < 4 \\ 2 < y < 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 1 < x < 4 \\ -3 < -y < -2 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$-2 < x-y < 2 \Rightarrow 0 < x-y+2 < 4 \Rightarrow 0 < A < 4$

ΘΕΜΑ 2_1009

Δίνεται η παράσταση: $A = |3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \ge 2$, $A = 3x-4$

ii) για κάθε $x < 2$, $A = 8-3x$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \ge 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) i) Αν $x \ge 2$, τότε

$3x \ge 6 \Leftrightarrow 3x-6 \ge 0 \Leftrightarrow |3x-6| = 3x-6$, άρα

$A = 3x-6+2 = 3x-4$.

ii) Αν $x < 2$, τότε

$3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0 \Leftrightarrow |3x-6| = -3x+6$, άρα

$A = -3x+6+2 = 8-3x$.

β) $$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} \overset{x\ge 2}{=} \frac{9x^2-16}{3x-6+2} = \frac{9x^2-16}{3x-4} =$$

$$= \frac{(3x)^2-4^2}{3x-4} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x+4$$

ΘΕΜΑ 2_1062

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow$
$-1+3 < y-3+3 < 1+3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Το εμβαδόν E του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x, y ισούται με $E = xy$. Αφού τα x, y παίρνουν θετικές τιμές, πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο ανισοτικές σχέσεις και έχουμε: $1\cdot 2 < xy < 3\cdot 4 \Leftrightarrow 2 < E < 12$.

ΘΕΜΑ 2_1074

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3| < 1$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $|y-3| < 1 \Leftrightarrow -1 < y-3 < 1 \Leftrightarrow$
$-1+3 < y-3+3 < 1+3 \Leftrightarrow 2 < y < 4$

β) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου με μήκη πλευρών x, y ισούται με $\Pi = 2x+2y = 2(x+y)$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο ανισοτικές σχέσεις, έχουμε

$1+2 < x+y < 3+4 \Leftrightarrow 3 < x+y < 7 \Leftrightarrow$

$2\cdot 3 < 2(x+y) < 2\cdot 7 \Leftrightarrow 6 < \Pi < 14$.

ΘΕΜΑ 2_1089

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές, (*Μονάδες 10*)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$ (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $5 < x \Leftrightarrow x-5 > 0$,

επομένως $|x-5| = x-5$ και $x < 10 \Leftrightarrow x-10 < 0$,

άρα $|x-10| = -(x-10) = -x+10$.

β) Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα (α), η παράσταση γράφεται

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} - \frac{x-10}{x-10} = 1-1 = 0.$$

ΘΕΜΑ 2_1091

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$

(*Μονάδες 13*)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία να προσδιορίσετε. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $1<x \Leftrightarrow x-1>0$, οπότε $|x-1|=x-1$ και $x<2 \Leftrightarrow x-2<0$, άρα $|x-2|=-(x-2)$. Επομένως η παράσταση γράφεται $A=|x-1|-|x-2|=x-1+x-2=2x-3$.

β) Για $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$ θα έχουμε και $x<2 \Leftrightarrow x-2<0$, επομένως $|x-1|=-(x-1)$ και $|x-2|=-(x-2)$. Άρα

$A=|x-1|-|x-2|=-(x-1)+x-2=$

$=-x+1+x-2=-1$.

ΘΕΜΑ 2_1273

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\le 2$ και $|y-6|\le 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$.

(*Μονάδες 12*)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $|x-3|\le 2 \Leftrightarrow -2\le x-3\le 2 \overset{+3}{\Leftrightarrow}$

$-2+3\le x-3+3\le 2+3 \Leftrightarrow 1\le x\le 5$ και

$|y-6|\le 4 \Leftrightarrow -4\le y-6\le 4 \overset{+6}{\Leftrightarrow}$

$-4+6\le y-6+6\le 4+6 \Leftrightarrow 2\le y\le 10$.

β) Το ορθογώνιο με διαστάσεις $2x$ και y έχει περίμετρο $\Pi=2(2x+y)=4x+2y$.

Από το ερώτημα (α) έχουμε

$1\le x\le 5 \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4\cdot 1\le 4x\le 4\cdot 5 \Leftrightarrow 4\le 4x\le 20 \ (1)$ και

$2\le y\le 10 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 2\le 2y\le 2\cdot 10 \Leftrightarrow$

$4\le 2y\le 20 \ (2)$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και έχουμε

$4+4\le 4x+2y\le 20+20 \Leftrightarrow 8\le \Pi\le 40$. Συνεπώς η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 8 και η μεγαλύτερη 40.

ΘΕΜΑ 2_1544

α) Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. (*Μονάδες 10*)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $x^2+4x+5=x^2+4x+\underbrace{4+1}_{5}=$

$=x^2+4x+4+1=\underbrace{(x+2)^2}_{(+)}+1>0$

β) $B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|=$

$=\left|\underbrace{x^2+4x+5}_{(+)}\right|-\left|\underbrace{(x+2)^2}_{(+)}\right|=$

$=x^2+4x+5-x^2-4x-4=1$

ΘΕΜΑ 2_2702

Δίνονται οι παραστάσεις:

$A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2\le x<3$, να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$. (*Μονάδες 16*)

β) Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Από την υπόθεση έχουμε $2\le x \Leftrightarrow x-2\ge 0$, οπότε $|x-2|=x-2$ και $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$, άρα $|x-3|=-(x-3)$. Επομένως έχουμε

$A+B=2|x-2|+|x-3|=2(x-2)-(x-3)=$

$=2x-4-x+3=x-1$.

β) $A+B=2 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3\notin[2,3)$, άρα δεν υπάρχει τέτοιος x.

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_2287

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5) \le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (*Μονάδες 5*)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (*Μονάδες 5*)

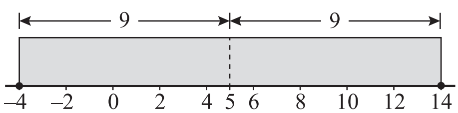
γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (*Μονάδες 10*)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$ (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) Η απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό x στον άξονα των πραγματικών αριθμών από το σημείο που παριστάνει τον αριθμό 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β)



γ) Η σχέση γράφεται $|x-5| \le 9 \Leftrightarrow -9 \le x-5 \le 9 \Leftrightarrow$

$-9+5 \le x \le 9+5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 14$.

δ) Από το ερώτημα (γ) έχουμε

$-4 \le x \Leftrightarrow 0 \le x+4 \Leftrightarrow |x+4| = x+4$ και

$x \le 14 \Leftrightarrow x-14 \le 0 \Leftrightarrow |x-14| = -(x-14) = 14-x$.

Άρα $|x+4|+|x-14| = x+4+14-x = 18$.

ΘΕΜΑ 4_2301

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων

i) $|x+2|$ (*Μονάδες 4*)

ii) $|x-7|$ (*Μονάδες 4*)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$ (*Μονάδες 5*)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (*Μονάδες 5*)

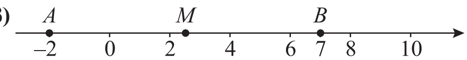
δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) i) $|x+2|$ είναι η απόσταση του σημείου M από το σημείο A.

ii) $|x-7|$ είναι η απόσταση του σημείου M από το σημείο B.

β)



Το άθροισμα $|x+2|+|x-7|$ ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων του M από το A και από το B.

γ) Επειδή $-2 < x < 7$, το σημείο M είναι εσωτερικό του τμήματος AB, οπότε το άθροισμα των αποστάσεων του M από το A και από το B ισούται με την απόσταση του A από το B.

Άρα $A=|x+2|+|x-7|=9$.

δ) Έχουμε $-2 < x \Leftrightarrow 0 < x+2 \Leftrightarrow |x+2| = x+2$ και

$x < 7 \Leftrightarrow x-7 < 0 \Leftrightarrow |x-7| = -(x-7) = 7-x$.

Άρα $A=|x+2|+|x-7| = x+2+7-x = 9$.

ΘΕΜΑ 4_2302

Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$. (*Μονάδες 10*)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 7*)

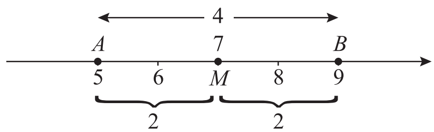
ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $|x-5|$ είναι η απόσταση των σημείων A και M, δηλαδή το μήκος (AM), και $|x-9|$ είναι η απόσταση των σημείων B και M, δηλαδή το μήκος (BM).

β) i) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε το σημείο M ισαπέχει από τα A και B, δηλαδή το σημείο M βρίσκεται στο μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

ii)



Το μέσο M αντιστοιχεί στον αριθμό 7.
Αλγεβρικά λύνουμε την εξίσωση:

$|x-5|=|x-9| \Leftrightarrow$

$(x-5=x-9 \text{ ή } x-5=-x+9) \Leftrightarrow$

$(0x=-4, \text{ αδύνατη, ή } 2x=14) \Leftrightarrow x=7$

ΘΕΜΑ 4_4946

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-3|\le 5$. (*Μονάδες 7*)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-3|$. (*Μονάδες 5*)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\le 5$. (*Μονάδες 5*)

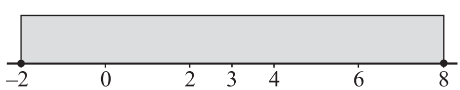
δ) Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-3|\le 5$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $|x-3|\le 5 \Leftrightarrow -5\le x-3\le 5 \Leftrightarrow 3-5\le x\le 3+5 \Leftrightarrow$
$-2\le x\le 8 \Leftrightarrow x\in[-2, 8]$

β)



Πρόκειται για τους αριθμούς που παριστάνονται στον άξονα των πραγματικών αριθμών με σημεία που απέχουν από το 3 απόσταση μικρότερη ή ίση του 5.

γ) Οι ακέραιοι αριθμοί που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-3|\le 5$ είναι οι $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

δ) Πρέπει $|x|\in[-2, 8] \Leftrightarrow -2\le |x|\le 8 \overset{|x|\ge 0}{\Leftrightarrow} 0\le |x|\le 8 \Leftrightarrow$
$|x|\le 8 \Leftrightarrow -8\le x\le 8 \Leftrightarrow x\in[-8, 8]$.
Οι ακέραιες λύσεις είναι οι
$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ \pm 5, \ \pm 6, \ \pm 7, \ \pm 8$.

ΘΕΜΑ 4_7791

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

(*Μονάδες 13*)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Αφού το γινόμενο $(\alpha-1)(1-\beta)$ είναι θετικό, οι παράγοντες $(\alpha-1)$ και $(1-\beta)$ είναι ομόσημοι, δηλαδή ή και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.

- Αν $\alpha-1>0 \Leftrightarrow \alpha>1$, τότε $1-\beta>0 \Leftrightarrow \beta<1$, άρα $\beta<1<\alpha$.
- Αν $\alpha-1<0 \Leftrightarrow \alpha<1$, τότε $1-\beta<0 \Leftrightarrow \beta>1$, άρα $\alpha<1<\beta$.

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α, β.

β) Έχουμε ότι $|\alpha-1|$ είναι η απόσταση του α από το 1, ενώ $|1-\beta|$ είναι η απόσταση του β από το 1. Άρα η παράσταση $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$ εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του α από το 1 και του β από το 1. Επειδή όμως από το ερώτημα (α) το 1 είναι μεταξύ των α, β, συμπεραίνουμε ότι η παράσταση K εκφράζει την απόσταση του α από το β, δηλαδή $K=|\beta-\alpha|=4$.

ΘΕΜΑ 4_8443

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\left|x-4\right|<2$. (*Μονάδες 10*)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (*Μονάδες 5*)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\left|x-4\right|<2 \Leftrightarrow -2<x-4<2 \Leftrightarrow$
$-2+4<x-4+4<2+4 \Leftrightarrow 2<x<6$, άρα
$x\in(2,6)$.

β) i) Έχουμε $\left|x-4\right|<2$ και από ερώτημα (α) προκύπτει
$2<x<6 \Leftrightarrow 2\cdot 3<3x<6\cdot 3 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow$
$6-4<3x-4<18-4 \Leftrightarrow 2<3x-4<14$,
άρα $3x-4>0 \Leftrightarrow \left|3x-4\right|=3x-4$. Τελικά,
$2<\left|3x-4\right|<14$, δηλαδή η απόσταση του $3x$ από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii) Έχουμε
$6<3x<18 \Leftrightarrow 6-19<3x-19<18-19 \Leftrightarrow$
$-13<3x-19<-1$, άρα
$3x-19<0 \Leftrightarrow \left|3x-19\right|=19-3x$. Συνεπώς
$1<19-3x<13 \Leftrightarrow 1<\left|3x-19\right|<13$, δηλαδή η απόσταση του $3x$ από το 19 είναι μεγαλύτερη του 1 και μικρότερη του 13.

ΘΕΜΑ 4_8453

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $\left|\alpha-2\right|<1$
- $\left|\beta-3\right|\le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$. (*Μονάδες 4*)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. (*Μονάδες 5*)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$. (*Μονάδες 7*)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\left|\alpha-2\right|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow$
$2-1<\alpha-2+2<1+2 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$

β) $\left|\beta-3\right|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\beta-3\le 2 \Leftrightarrow$
$3-2\le\beta\le 3+2 \Leftrightarrow 1\le\beta\le 5$, άρα ο β βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 1 και 5.

γ) $1<\alpha<3 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 2\cdot 1<2\alpha<2\cdot 3 \Leftrightarrow 2<2\alpha<6$ και

$1\le\beta\le 5 \overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow} -3\cdot 1\ge -3\beta\ge -3\cdot 5 \Leftrightarrow -15\le -3\beta\le -3$.

Επομένως $\left.\begin{matrix} 2<2\alpha<6 \\ -15\le -3\beta\le -3\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$

$2+(-15)<2\alpha+(-3\beta)<6+(-3) \Leftrightarrow$
$-13<2\alpha-3\beta<3$, άρα η παράσταση $2\alpha-3\beta$ βρίσκεται μεταξύ των αριθμών -13 και 3.

δ) $1\le\beta\le 5 \overset{1,\,\beta,\,5>0}{\Longleftrightarrow} \dfrac{1}{1}\ge\dfrac{1}{\beta}\ge\dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{\beta}\le 1$

Επομένως $\left.\begin{matrix} 1<\alpha<3 \\ \dfrac{1}{5}\le\dfrac{1}{\beta}\le 1\end{matrix}\right\}\overset{(\cdot)}{\Rightarrow}\dfrac{1}{5}<\dfrac{\alpha}{\beta}<3$, άρα η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$ βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $\dfrac{1}{5}$ και 3.

ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_936

Δίνεται η παράσταση:

$$A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 12*)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Πρέπει $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ και $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$. Άρα η παράσταση ορίζεται για $x\geq 4$.

β) $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)=$

$$=\left(\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2=x-4-(x+1)=-5$$

ΘΕΜΑ 2_938

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (*Μονάδες 12*)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Έχουμε

$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<\sqrt[3]{30}^{\,3}<4^3 \Leftrightarrow 27<30<64$, που ισχύει.

β) Έστω $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow \sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{30}>6 \Leftrightarrow$

$$2\sqrt[3]{30}>6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{30}>\frac{6}{2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{30}>3 \Leftrightarrow$$

$\sqrt[3]{30}^{\,3}>3^3 \Leftrightarrow 30>27$, που ισχύει. Επομένως η αρχική μας υπόθεση ήταν σωστή, άρα $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}$.

ΘΕΜΑ 2_944

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (*Μονάδες 13*)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Πρέπει $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ και $6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$. Άρα $x\in[4,6]$.

β) Για $x=5$ είναι $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$ και $A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$.

ΘΕΜΑ 2_947

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (*Μονάδες 12*)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι:

$A^2-A=2\left(10-\sqrt{5}\right)$ (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Πρέπει $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$ και $x^2+4\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $x\in[4,+\infty)$.

β) Για $x=4$ είναι $A=\sqrt{4^2+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}$ και

$$A^2-A=\left(\sqrt{20}\right)^2-\sqrt{20}=20-\sqrt{4\cdot 5}=$$

$$=2\cdot 10-2\sqrt{5}=2\left(10-\sqrt{5}\right).$$

ΘΕΜΑ 2_950

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (*Μονάδες 13*)

β) Για $x=-3$, να αποδείξετε ότι:

$A^3+A^2+A+1=0$ (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Πρέπει $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ και $x^4\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $x\in(-\infty,1]$.

β) Για $x=-3$ είναι:

$$A=\sqrt{1-(-3)}-\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt{4}-3=-1 \text{ και}$$

$$A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=$$

$$=-1+1-1+1=0.$$

ΘΕΜΑ 2_952

Δίνεται η παράσταση: $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (*Μονάδες 13*)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Πρέπει $(x-2)^5\geq 0 \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$.

Άρα $x\in[2,+\infty)$.

β) Για $x=4$ είναι $B=\sqrt[5]{(4-2)^5}=\sqrt[5]{2^5}=2$ και

$$B^2+6B=2^2+6\cdot 2=16=2^4=B^4.$$

ΘΕΜΑ 2_955

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$ (*Μονάδες 13*)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt[3]{2}$ (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $A-B=\left(\sqrt{2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot 3}-\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2\cdot 3}=$

$$=\left(\sqrt{2}^2\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}^3\right)^2=2^3-2^2=8-4=4$$

β) Είναι $1<2\Rightarrow \sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{2}\Rightarrow 1<\sqrt[3]{2}$ και από το ερώτημα (α) έχουμε

$$A-B=4>0\Rightarrow A>B\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^6>\left(\sqrt[3]{2}\right)^6\Rightarrow$$

$$\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}\right)^6}>\sqrt[6]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^6}\Rightarrow\sqrt{2}>\sqrt[3]{2}.$$ Άρα

$$1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 2_1276

Δίνεται η παράσταση:

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}+\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (*Μονάδες 12*)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Τα υπόρριζα είναι τέλεια τετράγωνα, επομένως οι αριθμητές ορίζονται για κάθε τιμή του x. Για τους παρονομαστές πρέπει $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$ και $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$. Τελικά, $x\in\mathbb{R}-\{-2,3\}$.

β) Από την ανισοτική σχέση έχουμε

$-2<x\Leftrightarrow x+2>0$ και $x<3\Leftrightarrow x-3<0$.

$$K=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}+\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=$$

$$=\frac{|x+2|}{x+2}+\frac{|x-3|}{x-3}\overset{x+2>0}{\underset{x-3<0}{=\!=}}\frac{x+2}{x+2}-\frac{x-3}{x-3}=1-1=0,$$

σταθερή.

ΘΕΜΑ 2_1300

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6,\quad B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6,\quad \Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6.$$

α) Να δείξετε ότι: $A+B+\Gamma=23$. (*Μονάδες 13*)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) $A+B+\Gamma=\left(\sqrt{2}\right)^6+\left(\sqrt[3]{3}\right)^6+\left(\sqrt[6]{6}\right)^6=$

$$=2^{\frac{6}{2}}+3^{\frac{6}{3}}+6=2^3+3^2+6=8+9+6=23$$

β) Αφού $B=9$ και $\Gamma=6$, έχουμε $B>\Gamma$, άρα $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6>\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$, οπότε, αφού οι αριθμοί $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$ είναι θετικοί, συμπεραίνουμε ότι $\sqrt[3]{3}>\sqrt[6]{6}$.

ΘΕΜΑ 2_3382

Δίνεται η παράσταση: $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

α) Να δείξετε ότι: $A=4$. (*Μονάδες 12*)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\left|x+A\right|=1$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $A=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}+\dfrac{\sqrt{5}^2-\sqrt{15}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=$

$=\dfrac{\sqrt{15}+3}{5-3}+\dfrac{5-\sqrt{15}}{5-3}=\dfrac{8}{2}=4$

β) $\left|x+A\right|=1\overset{A=4}{\Longleftrightarrow}\left|x+4\right|=1\Leftrightarrow$

$\left(x+4=1 \text{ ή } x+4=-1\right)\Leftrightarrow\left(x=-3 \text{ ή } x=-5\right)$

ΘΕΜΑ 2_4311

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\sqrt{\left(x-2\right)^2}$ και

$B=\sqrt[3]{\left(2-x\right)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; (*Μονάδες 7*)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; (*Μονάδες 8*)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Πρέπει $\left(x-2\right)^2\ge 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Πρέπει $\left(2-x\right)^3\ge 0\Leftrightarrow 2-x\ge 0\Leftrightarrow 2\ge x\Leftrightarrow x\le 2$.

Άρα η παράσταση B ορίζεται για κάθε $x\in\left(-\infty, 2\right]$.

γ) Για κάθε $x\le 2$ ορίζονται και οι δύο παραστάσεις A και B και γράφονται

$A=\sqrt{\left(x-2\right)^2}=\left|x-2\right|\overset{x\le 2}{=\!=}-\left(x-2\right)=2-x$ και

$B=\sqrt[3]{\left(2-x\right)^3}=2-x$.

Άρα για κάθε $x\le 2$ είναι $A=B$.

ΘΕΜΑ 2_4314

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot \Gamma=\sqrt{15}$ (*Μονάδες 15*)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{5}=5^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}=$

$=5^{\frac{2}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=\left(5\cdot 3\right)^{\frac{1}{2}}=$

$=15^{\frac{1}{2}}=\sqrt{15}$

β) Γράφουμε πρώτα τους A, B ως ρίζες με τάξη ίση με το Ε.Κ.Π. των τάξεων των ριζών, ώστε να συγκρίνουμε μετά τα υπόρριζα:

- $A=\sqrt[3]{5}=\sqrt[2\cdot 3]{5^2}=\sqrt[6]{25}$
- $B=\sqrt{3}=\sqrt[2\cdot 3]{3^3}=\sqrt[6]{27}$

Αφού $25<27$, θα είναι $\sqrt[6]{25}<\sqrt[6]{27}$, άρα $A<B$.

ΘΕΜΑ 2_4316

Αν είναι $A=2-\sqrt{3}$, $B=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$. (*Μονάδες 12*)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi=A^2+B^2$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $AB=\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=2^2-\sqrt{3}^2=4-3=1$

β) $\Pi=A^2+B^2=\left(A+B\right)^2-2AB=$

$=\left(2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}\right)^2-2\cdot 1=4^2-2=16-2=14$

ΘΕΜΑ 2_8173

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2}\cong 1{,}41$

$\sqrt{3}\cong 1{,}73$

$\sqrt{5}\cong 2{,}24$

$\sqrt{7}\cong 2{,}64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Έχουμε

$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\cong 2\cdot 2{,}24=4{,}48,$

$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}\cong 3\cdot 2{,}24=6{,}72,$

$\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}\cong 4\cdot 2{,}24=8{,}96.$

β) $\dfrac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{4\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}}{\sqrt{9\cdot 5}-\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{3\sqrt{4}\sqrt{5}+\sqrt{16}\sqrt{5}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=$

$=\dfrac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5$

■

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_485

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x=x+\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα: $(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(*Μονάδες 8*)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (*Μονάδες 8*)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\lambda x=x+\lambda^2-1\Leftrightarrow \lambda x-x=\lambda^2-1\Leftrightarrow$
$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1)$

β) Πρέπει $\lambda-1\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq 1$. Για $\lambda\neq 1$ η λύση είναι

$x=\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1}\Leftrightarrow x=\lambda+1.$

γ) Για να είναι η εξίσωση ταυτότητα, πρέπει να είναι της μορφής $0x=0$, άρα πρέπει $\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=1$ και $(\lambda-1)(\lambda+1)=0\Leftrightarrow(\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1)$.

Άρα $\lambda=1$.

ΘΕΜΑ 2_507

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις. (*Μονάδες 6*)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση. (*Μονάδες 9*)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Για $\lambda=0$, $\lambda=1$ και $\lambda=2$ η (1) γίνεται αντίστοιχα $-9x=0$, $-8x=-2$ και $-5x=-2$.

β) Η (1) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

$\lambda^2-9\neq 0\Leftrightarrow(\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq\pm 3.$

γ) Για $\lambda\neq\pm 3$ η μοναδική λύση της (1) είναι

$(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda\Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda^2-3\lambda}{\lambda^2-9}\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{\lambda(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}\Leftrightarrow x=\dfrac{\lambda}{\lambda+3}$. Πρέπει

$\dfrac{\lambda}{\lambda+3}=4\Leftrightarrow\lambda=4(\lambda+3)\Leftrightarrow\lambda=4\lambda+12\Leftrightarrow$
$-3\lambda=12\Leftrightarrow\lambda=-4.$

ΘΕΜΑ 2_1055

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (*Μονάδες 12*)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Για $\lambda=1$ η εξίσωση γίνεται

$(1-1)x=(1+1)(1+2)\Leftrightarrow 0x=6$, αδύνατη.

Για $\lambda=-1$ η εξίσωση γίνεται

$(1-1)x=(-1+1)(-1+2)\Leftrightarrow 0x=0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση έχει μοναδική λύση όταν ο συντελεστής του αγνώστου δεν είναι μηδέν, δηλαδή $\lambda^2-1\neq 0\Leftrightarrow \lambda^2\neq 1\Leftrightarrow \lambda\neq\pm 1$.

ΘΕΜΑ 2_4302

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$, (*Μονάδες 5*)

ii) όταν $\alpha=-3$. (*Μονάδες 8*)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) i) Για $\alpha=1$ η εξίσωση γίνεται

$(1+3)x=1^2-9\Leftrightarrow 4x=-8\Leftrightarrow x=-2$.

ii) Για $\alpha=-3$ η εξίσωση γίνεται

$(-3+3)x=(-3)^2-9\Leftrightarrow 0x=0$ και είναι αόριστη (ή ταυτότητα), δηλαδή $x\in\mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση μοναδική λύση, πρέπει $\alpha+3\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq -3$.

Άρα για κάθε $\alpha\in(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση, η οποία είναι:

$(\alpha+3)x=\alpha^2-9\Leftrightarrow(\alpha+3)x=(\alpha-3)(\alpha+3)\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{(\alpha-3)(\alpha+3)}{\alpha+3}\Leftrightarrow x=\alpha-3$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

2α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 2_481

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (*Μονάδες 8*)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. (*Μονάδες 8*)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1+x_2=x_1x_2$ (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha=1$, $\beta=-2\lambda$ και $\gamma=4(\lambda-1)$. Η διακρίνουσά της είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-2\lambda)^2-4\cdot 4(\lambda-1)=$

$=4\lambda^2-16\lambda+16=(2\lambda-4)^2$.

β) Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $\Delta=(2\lambda-4)^2\geq 0$, άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Είναι $x_1+x_2=S=2\lambda$ και $x_1x_2=P=4(\lambda-1)$, οπότε η εξίσωση γίνεται

$x_1+x_2=x_1x_2\Leftrightarrow 2\lambda=4(\lambda-1)\Leftrightarrow$

$2\lambda=4\lambda-4\Leftrightarrow 2\lambda=4\Leftrightarrow\lambda=2$.

ΘΕΜΑ 2_483

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$. (*Μονάδες 12*)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow (2x-1=3 \text{ ή } 2x-1=-3) \Leftrightarrow$
$(x=2 \text{ ή } x=-1)$

β) Επειδή $\alpha < \beta$, είναι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.
Η εξίσωση γίνεται $-x^2+2x+3=0$ με διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3 = 16$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2\cdot(-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2-4}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-2+4}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 2_493

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2| = \sqrt{3}$. (*Μονάδες 10*)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $|x-2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow (x-2=\sqrt{3} \text{ ή } x-2=-\sqrt{3}) \Leftrightarrow$

$(x = 2+\sqrt{3} \text{ ή } x = 2-\sqrt{3})$

β) Για $x_1 = 2+\sqrt{3}$ και

$x_2 = 2-\sqrt{3}$, είναι $x_1 + x_2 = 4$ και

$x_1x_2 = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4-3 = 1.$

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση με ρίζες x_1, x_2 είναι η $x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$

ΘΕΜΑ 2_496

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (*Μονάδες 8*)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Μονάδες 8*)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:
$(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0$ (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) Η διακρίνουσα είναι $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot 4(\lambda-1) =$
$= 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda - 4)^2$.

β) Η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2\lambda-4)^2 \geq 0$, που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Είναι $x_1 + x_2 = -2\lambda$ και $x_1x_2 = 4(\lambda-1)$. Άρα

$(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$(-2\lambda)^2 + 4(\lambda-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda)^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(2\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2}.$

ΘΕΜΑ 2_1005

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \dfrac{1+x}{x-1}$ και $B = \dfrac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$. (*Μονάδες 12*)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A = B$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Πρέπει $(x-1 \neq 0 \text{ και } x^2 - x \neq 0) \Leftrightarrow$

$(x-1\neq 0 \text{ και } x(x-1) \neq 0) \Leftrightarrow$

$(x-1 \neq 0 \text{ και } x \neq 0) \Leftrightarrow$

$(x \neq 1 \text{ και } x \neq 0)$.

β) $A = B \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{x-1} = \dfrac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow$

$\dfrac{x(1+x)}{x(x-1)} - \dfrac{2}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2+x-2}{x(x-1)} = 0 \overset{x\neq 1, x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x^2 + x - 2 = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 9$ και οι ρίζες $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{cases}$.

Η λύση $x = 1$ απορρίπτεται, άρα $x = -2$.

ΘΕΜΑ 2_1007

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$. (*Μονάδες 15*)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x-2} = 0$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $-2x^2 + 10x = 12 \Leftrightarrow -2x^2 + 10x - 12 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-12) = 100 - 96 = 4$ και οι ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot (-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-10+2}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ x_2 = \frac{-10-2}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{cases}.$$

β) Είναι

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x-2} = 0 \overset{x \neq 2}{\Leftrightarrow} -2x^2 + 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x = 2,\ \text{απορρίπτεται, ή } x = 3,\ \text{δεκτή}\right) \Leftrightarrow x = 3.$$

ΘΕΜΑ 2_1093

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5+\sqrt{5}},\ B = \frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$ (*Μονάδες 8*)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (*Μονάδες 8*)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) i) $A + B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} =$

$$= \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} + \frac{5+\sqrt{5}}{5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{5-\sqrt{5}}{25-5} + \frac{5+\sqrt{5}}{25-5} =$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

ii) $A \cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{25-5} = \frac{1}{20}$

β) $S = A + B = \frac{1}{2}$ και $P = AB = \frac{1}{20}$ και

κατασκευάζουμε την εξίσωση 2ου βαθμού που δίνεται από τη σχέση

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0.$$

ΘΕΜΑ 2_1275

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (*Μονάδες 6*)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$,

$x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. (*Μονάδες 9*)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\alpha = 2,\ \beta = 5,\ \gamma = -1$, οπότε

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33 > 0$,

άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

β) Έχουμε $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$,

$x_1 x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{2}$ και

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5.$$

γ) Βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$:

$$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=5 \text{ και } P=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

και μία εξίσωση 2ου βαθμού με τις παραπάνω ρίζες είναι $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-5x-2=0$.

ΘΕΜΑ 2_1298

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$. (*Μονάδες 10*)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \overset{\alpha+\beta=2}{\Longleftrightarrow}$

$2\alpha\beta=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta=-15$

β) Βρίσκουμε το άθροισμα και το γινόμενο των α και β: $S=\alpha+\beta=2$ και $P=\alpha\beta=-15$ και μία εξίσωση 2ου βαθμού με τις παραπάνω ρίζες είναι $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0$, με

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64>0$ και ρίζες

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm8}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3\\ x_2=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5\end{cases}.$$

Άρα $\alpha=-3$ και $\beta=5$ ή $\alpha=5$ και $\beta=-3$.

ΘΕΜΑ 2_1509

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ. (*Μονάδες 13*)

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1). (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Για $x=1$ η (1) γράφεται

$1^2-(\lambda-1)\cdot1+6=0 \Leftrightarrow 1-\lambda+1+6=0 \Leftrightarrow \lambda=8$.

β) Για $\lambda=2$ η (1) γράφεται

$x^2-(2-1)x+6=0 \Leftrightarrow x^2-x+6=0$.

$\alpha=1, \beta=-1, \gamma=6, \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=$

$=(-1)^2-4\cdot1\cdot6=1-24=-23<0$, αδύνατη.

ΘΕΜΑ 2_3839

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2. (*Μονάδες 12*)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq0$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Αντικαθιστούμε όπου x το -2:

$\lambda(-2)^2-(\lambda-1)(-2)-1=0 \Leftrightarrow$

$4\lambda+2(\lambda-1)-1=0 \Leftrightarrow 4\lambda+2\lambda-3=0 \Leftrightarrow$

$6\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$.

β) Για $\lambda\neq0$ η εξίσωση είναι 2ου βαθμού. Βρίσκουμε τη διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1$ με

$\alpha=\lambda,\quad \beta=-(\lambda-1),\quad \gamma=-1,$

$\Delta=\left[-(\lambda-1)\right]^2-4\lambda\cdot(-1)=(\lambda-1)^2+4\lambda=$

$=\lambda^2-2\lambda+1+4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2\geq0$.

Άρα για κάθε $\lambda\neq0$ ισχύει $\Delta\geq0$, επομένως η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 2_3847

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες, (*Μονάδες 13*)

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2. (*Μονάδες 12*)

Λύση

Η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού, επειδή $\lambda \neq -2$.
Έχουμε $\alpha = \lambda + 2,\ \beta = 2\lambda,\ \gamma = \lambda - 1$,

$\Delta = \left(2\lambda\right)^2 - 4\left(\lambda + 2\right)\left(\lambda - 1\right) =$

$= 4\lambda^2 - 4\left(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2\right) =$

$= 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 8 = -4\lambda + 8.$

α) Πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 8 > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 8 \Leftrightarrow \lambda < 2$, άρα η εξίσωση έχει δύο πραγματικές, άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in \left(-\infty, 2\right)$.

β) $x_1 + x_2 = S = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{2\lambda}{\lambda + 2}$. Πρέπει να ισχύει

$S = 2 \Leftrightarrow -\dfrac{2\lambda}{\lambda + 2} = 2 \Leftrightarrow -2\lambda = 2\left(\lambda + 2\right) \Leftrightarrow$

$-2\lambda = 2\lambda + 4 \Leftrightarrow 4\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -1.$

Η τιμή του λ είναι δεκτή, αφού $-1 \in \left(-\infty, 2\right)$.

ΘΕΜΑ 2_3857

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha\beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta = 5$. (*Μονάδες 10*)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta\left(\alpha + \beta\right) = 20 \overset{\alpha\beta=4}{\Longleftrightarrow}$

$4\left(\alpha + \beta\right) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$

β) Η εξίσωση που ζητάμε έχει $S = \alpha + \beta = 5$ και $P = \alpha\beta = 4$.

Επομένως η εξίσωση είναι της μορφής $x^2 - Sx + P = 0$, δηλαδή $x^2 - 5x + 4 = 0$.

$\Delta = \left(-5\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 > 0$, οπότε

$$x_{1,2} = \frac{-\left(-5\right) \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5-3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{5+3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}.$$

Άρα $\alpha = 1$ και $\beta = 4$ ή $\alpha = 4$ και $\beta = 1$.

ΘΕΜΑ 2_3863

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = -1$ και $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (*Μονάδες 10*)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12 \Rightarrow$

$\alpha\beta\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) = -12 \Rightarrow \alpha\beta\left(\alpha + \beta\right)^2 = -12 \Rightarrow$

$\alpha\beta \cdot \left(-1\right)^2 = -12 \Rightarrow \alpha\beta = -12$

β) Μια τέτοια εξίσωση είναι η $x^2 - \left(\alpha + \beta\right)x + \alpha\beta = 0$, δηλαδή η εξίσωση $x^2 + x - 12 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-12\right) = 1 + 48 = 49 > 0$, άρα

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-1-7}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \\ x_2 = \dfrac{-1+7}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}.$$

Έτσι, $\left(\alpha = -4,\ \beta = 3\right)$ ή $\left(\alpha = 3,\ \beta = -4\right)$.

ΘΕΜΑ 2_4306

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - x - 6 = 0$. (1) (*Μονάδες 9*)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - 1\right| < 2$. (2) (*Μονάδες 9*)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = -6$. Άρα

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \left(-1\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-6\right) = 1 + 48 = 49 > 0$, οπότε

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\left(-1\right) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

β) $\left|x-1\right|<2 \Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow$
$-2+1<x-1+1<2+1 \Leftrightarrow -1<x<3$. Άρα
$x\in\left(-1,3\right)$.

γ) Εξετάζουμε αν οι λύσεις της εξίσωσης $\left(1\right)$ ανήκουν στο σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $\left(2\right)$:

$-\frac{3}{2}\notin\left(-1,3\right)$, ενώ $2\in\left(-1,3\right)$.

Άρα η μόνη τιμή του x που ικανοποιεί τις $\left(1\right)$ και $\left(2\right)$ είναι η 2.

ΘΕΜΑ 2_4308

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση:

$$\Pi=\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (*Μονάδες 10*)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0$$ (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Πρέπει

$x^2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)\neq 0 \Leftrightarrow \left(x\neq 0 \text{ και } x\neq 1\right)$ και

$1-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Τελικά, $x\in\mathbb{R}-\left\{0,1\right\}$.

β) Για $x\in\mathbb{R}-\left\{0,1\right\}$:

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x}+\frac{1}{1-x}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x\left(x-1\right)}-\frac{1}{x-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(x-1\right)\frac{2x^2-1}{x\left(x-1\right)}-x\left(x-1\right)\frac{1}{x-1}=x\left(x-1\right)\cdot 0 \Leftrightarrow$$

$2x^2-1-x=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$.

$\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=-1$, άρα

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-1\right)^2-4\cdot 2\cdot\left(-1\right)=9>0$, οπότε

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-1\right)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=1, \text{ απορρίπτεται} \\ x_2=-\frac{1}{2}, \text{ δεκτή} \end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 2_4309

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=20\,cm$ και εμβαδό $E=24\,cm^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου. (*Μονάδες 15*)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Αν x, y είναι οι πλευρές του ορθογωνίου, τότε:

$\Pi=2x+2y \overset{\Pi=20}{\Longleftrightarrow} 2x+2y=20 \Leftrightarrow x+y=10 \ \left(1\right)$

$E=xy \Leftrightarrow xy=24 \ \left(2\right)$

Οι x και y είναι ρίζες της εξίσωσης που ζητάμε, επομένως $S=x+y=10$ και $P=xy=24$.

Άρα μία εξίσωση με ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου είναι

$x^2-Sx+P=0 \underset{P=24}{\overset{S=10}{\Longleftrightarrow}} x^2-10x+24=0$.

β) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2-10x+24=0$.

$\alpha=1,\ \beta=-10,\ \gamma=24$, άρα

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(-10\right)^2-4\cdot 1\cdot 24=$

$=100-96=4>0$, οπότε

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\left(-10\right)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm 2}{2}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{12}{2}=6 \\ x_2=\frac{8}{2}=4 \end{cases}.$$

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι $6\,cm$ και $4\,cm$.

ΘΕΜΑ 2_4310

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε $\alpha+\beta=12$ και $\alpha^2+\beta^2=272$.

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $\left(\alpha+\beta\right)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=-64$. (*Μονάδες 8*)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β. (*Μονάδες 10*)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$

$2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2) \overset{\alpha+\beta=12}{\underset{\alpha^2+\beta^2=272}{\Longleftrightarrow}}$

$2\alpha\beta=12^2-272 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=144-272 \Leftrightarrow$

$2\alpha\beta=-128 \Leftrightarrow \alpha\beta=-64$

β) Το άθροισμα των ριζών της ζητούμενης εξίσωσης είναι $S=\alpha+\beta=12$ και το γινόμενο των ριζών της είναι $P=\alpha\beta=-64$.

Άρα μία τέτοια εξίσωση είναι η

$x^2-Sx+P=0 \overset{S=12}{\underset{P=-64}{\Longleftrightarrow}} x^2-12x-64=0.$

γ) Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε:

$\Delta=(-12)^2-4\cdot1\cdot(-64)=144+256=400>0$, άρα

$$x_{1,2}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{400}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{12+20}{2}=16\\[2mm] x_2=\dfrac{12-20}{2}=-4\end{cases}.$$

Άρα $\alpha=16$ και $\beta=-4$ ή $\alpha=-4$ και $\beta=16$.

ΘΕΜΑ 2_4313

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\dfrac{1}{3-\sqrt7}$, $B=\dfrac{1}{3+\sqrt7}$

α) Να δείξετε ότι $A+B=3$ και $A\cdot B=\dfrac12$.

(*Μονάδες 12*)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) $A+B=\dfrac{1}{3-\sqrt7}+\dfrac{1}{3+\sqrt7}=$

$$=\frac{1(3+\sqrt7)}{(3-\sqrt7)(3+\sqrt7)}+\frac{1(3-\sqrt7)}{(3-\sqrt7)(3+\sqrt7)}=$$

$$=\frac{(3+\sqrt7)+(3-\sqrt7)}{(3-\sqrt7)(3+\sqrt7)}=\frac{3+\sqrt7+3-\sqrt7}{3^2-\sqrt7^2}=$$

$=\dfrac{6}{9-7}=\dfrac62=3$ και

$$AB=\frac{1}{3-\sqrt7}\cdot\frac{1}{3+\sqrt7}=\frac{1\cdot1}{(3-\sqrt7)(3+\sqrt7)}=$$

$$=\frac{1}{3^2-\sqrt7^2}=\frac{1}{9-7}=\frac12.$$

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $x^2-Sx+P=0$ με $S=A+B=3$ και

$P=AB=\dfrac12$. Άρα $x^2-3x+\dfrac12=0.$

ΘΕΜΑ 2_4317

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(*Μονάδες 12*)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε $x_1\cdot x_2=-3$. (*Μονάδες 13*)

Λύση

α) Για την εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$

ισχύει ότι $\lambda\neq-2\Leftrightarrow\lambda+2\neq0$, άρα είναι δευτεροβάθμια. Βρίσκουμε τη διακρίνουσά της:

$\alpha=\lambda+2$, $\beta=2\lambda$ και $\gamma=\lambda-1$, οπότε

$\Delta=(2\lambda)^2-4(\lambda+2)(\lambda-1)=$

$=4\lambda^2-4(\lambda^2-\lambda+2\lambda-2)=$

$=4\lambda^2-4(\lambda^2+\lambda-2)=$

$=4\lambda^2-4\lambda^2-4\lambda+8=-4\lambda+8.$

Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, πρέπει

$\Delta>0\Leftrightarrow-4\lambda+8>0\Leftrightarrow4\lambda<8\Leftrightarrow\lambda<2$. Άρα για κάθε $\lambda\in(-\infty,2)$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Για $\lambda\in(-\infty,2)$ έχουμε $P=x_1x_2=\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}$, οπότε

$\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}=-3\Leftrightarrow\lambda-1=-3(\lambda+2)\Leftrightarrow$

$\lambda-1=-3\lambda-6\Leftrightarrow4\lambda=-5\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac54.$

4α ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 4_1890

Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\lambda+2\right)x^2+\left(2\lambda+3\right)x+\lambda-2=0 \quad (1),$$

με παράμετρο $\lambda\neq -2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta=12\lambda+25$ (*Μονάδες 6*)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (*Μονάδες 7*)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P=x_1x_2$. (*Μονάδες 4*)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $\left(x_1+x_2-1\right)^2+\left(x_1x_2+3\right)^2=0$ (*Μονάδες 8*)

Λύση

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha=\lambda+2$, $\beta=2\lambda+3$ και $\gamma=\lambda-2$.

α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left(2\lambda+3\right)^2-4\left(\lambda+2\right)\left(\lambda-2\right)=$$
$$=\left(2\lambda\right)^2+2\cdot3\cdot\left(2\lambda\right)+3^2-4\left(\lambda^2-4\right)=$$
$$=4\lambda^2+12\lambda+9-4\lambda^2+16=12\lambda+25.$$

β) Για να έχει η (1) δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, πρέπει $\lambda\neq-2$ και

$$\Delta>0\Leftrightarrow 12\lambda+25>0\Leftrightarrow 12\lambda>-25\Leftrightarrow \lambda>-\frac{25}{12}.$$

Τελικά, $\lambda\in\left(-\frac{25}{12},-2\right)\cup\left(-2,+\infty\right)$.

γ) Είναι $S=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}$ και $P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda-2}{\lambda+2}$.

δ) $\left(x_1+x_2-1\right)^2+\left(x_1x_2+3\right)^2=0\Leftrightarrow$

$\left(x_1+x_2-1=0 \text{ και } x_1x_2+3=0\right)\Leftrightarrow$

$\left(-\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}-1=0 \text{ και } \frac{\lambda-2}{\lambda+2}+3=0\right)\Leftrightarrow$

$\left(\frac{-3\lambda-5}{\lambda+2}=0 \text{ και } \frac{4\lambda+4}{\lambda+2}=0\right)\Leftrightarrow$

$\left(\lambda=-\frac{5}{3} \text{ και } \lambda=-1\right)$, αδύνατη.

Άρα δεν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η δοσμένη σχέση.

ΘΕΜΑ 4_1955

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A<t_B,\ t_\Gamma=\frac{t_A+2t_B}{3} \text{ και } \left|t_A-t_\Delta\right|=\left|t_B-t_\Delta\right|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}$. (*Μονάδες 5*)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 10*)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A+t_B=6 \text{ και } t_A\cdot t_B=8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B. (*Μονάδες 5*)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών. (*Μονάδες 5*)

Λύση

α) i) Έχουμε $\left|t_A-t_\Delta\right|=\left|t_B-t_\Delta\right|\Leftrightarrow\left(t_A-t_\Delta=t_B-t_\Delta\right.$ ή

$\left.t_A-t_\Delta=t_\Delta-t_B\right)\Leftrightarrow$

$\left(t_A=t_B\text{, αδύνατη, ή } t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}\right)$.

Τελικά, $t_\Delta=\frac{t_A+t_B}{2}$.

ii) Ισχύει $t_A<t_\Delta<t_B$. Αναζητούμε τη θέση του t_Γ:

- Έστω $t_\Gamma>t_B\Leftrightarrow\frac{t_A+2t_B}{3}>t_B\Leftrightarrow$
  $t_A+2t_B>3t_B\Leftrightarrow t_A>t_B$,
  άτοπο, άρα $t_\Gamma\leq t_B$. Όμως, αν
  $t_\Gamma=t_B\Leftrightarrow t_A=t_B$, άτοπο, άρα $t_\Gamma<t_B$.

- Έστω $t_\Gamma>t_\Delta\Leftrightarrow\frac{t_A+2t_B}{3}>\frac{t_A+t_B}{2}\Leftrightarrow$
  $2t_A+4t_B>3t_A+3t_B\Leftrightarrow$
  $4t_B-3t_B>3t_A-2t_A\Leftrightarrow t_B>t_A$, που ισχύει από υπόθεση, άρα $t_\Gamma>t_\Delta$.

Τελικά, $t_A<t_\Delta<t_\Gamma<t_B$, δηλαδή πρώτος

τερμάτισε ο Αργύρης, δεύτερος ο Δημήτρης, τρίτος ο Γιώργος και τελευταίος ο Βασίλης.

β) i) Μία τέτοια εξίσωση είναι η $x^2-6x+8=0$.

ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2-6x+8=0$:

$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4>0$, άρα

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4\\ x_2=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}.$$

Οι χρόνοι τερματισμού του Αργύρη (t_A) και του Βασίλη (t_B) είναι οι ρίζες της εξίσωσης και, αφού $t_B>t_A$, προκύπτει ότι $t_B=4$ λεπτά και $t_A=2$ λεπτά. Επομένως

$t_\Gamma=\frac{2+2\cdot4}{3}=\frac{2+8}{3}=\frac{10}{3}$ λεπτά και

$t_\Delta=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$ λεπτά.

ΘΕΜΑ 4_2055

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0,(1)$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού. (*Μονάδες 6*)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή:

$\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ (*Μονάδες 6*)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (*Μονάδες 7*)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) Για να είναι η (1) εξίσωση 2ου βαθμού, πρέπει

$\lambda^2-\lambda\neq0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-1)\neq0\Leftrightarrow(\lambda\neq0 \text{ και } \lambda\neq1)$.

β) Έχουμε $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0\Leftrightarrow$

$\lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+(\lambda-1)=0\overset{\lambda\neq1}{\Leftrightarrow}$

$\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

γ) Από την ισοδύναμη μορφή

$\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ της (1) έχουμε

$\Delta=\left[-(\lambda+1)\right]^2-4\lambda=(\lambda+1)^2-4\lambda=$

$=\lambda^2+2\lambda+1-4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2>0$, αφού $\lambda\neq1$, άρα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Για να είναι η (1) 2ου βαθμού, θα ισχύουν για τον λ οι περιορισμοί του ερωτήματος (α), άρα η ισοδύναμη μορφή της (1) θα είναι $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$ με $\Delta=(\lambda-1)^2$, άρα

$$x_{1,2}=\frac{\lambda+1\pm\sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda}=\frac{\lambda+1\pm(\lambda-1)}{2\lambda}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda}=\frac{2}{2\lambda}=\frac{1}{\lambda}\\ x_2=\frac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda}=\frac{2\lambda}{2\lambda}=1\end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 4_2081

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$. (*Μονάδες 5*)

β) Έστω $\lambda\neq0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε. (*Μονάδες 10*)

ii) Αν $x_1=-1$ και $x_2=-1+\frac{2}{\lambda}$ είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1-x_2|>1$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Για $\lambda=0$ η εξίσωση είναι πρωτοβάθμια και γίνεται $-2x-2=0\Leftrightarrow-2x=2\Leftrightarrow x=-1$.

β) i) Για $\lambda\neq0$ η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια με διακρίνουσα $\Delta=\left[2(\lambda-1)\right]^2-4\lambda(\lambda-2)=$

$= 4\left(\lambda - 1\right)^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda =$

$= 4\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) - 4\lambda^2 + 8\lambda =$

$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4 > 0,$

άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις $x_{1,2} = \dfrac{-2\left(\lambda - 1\right) \pm \sqrt{4}}{2\lambda} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2\lambda + 2 - 2}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2\lambda + 2 + 2}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda + 4}{2\lambda} = -1 + \dfrac{2}{\lambda} \end{cases}.$$

ii) Έχουμε

$\left|x_1 - x_2\right| > 1 \Leftrightarrow \left|-1 - \left(-1 + \dfrac{2}{\lambda}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{2}{\left|\lambda\right|} > 1 \Leftrightarrow 2 > \left|\lambda\right| \Leftrightarrow -2 < \lambda < 2.$

Όμως $\lambda \neq 0$, άρα $\lambda \in \left(-2, 0\right) \cup \left(0, 2\right)$.

ΘΕΜΑ 4_2332

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0$ $\left(1\right)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η $\left(1\right)$ έχει δύο ρίζες άνισες. (*Μονάδες 10*)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\left(1\right)$:

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού *λ*. (*Μονάδες 5*)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $\left(1\right)$ είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης $\left(1\right)$ είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το *λ*. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\Delta = \left(-4\right)^2 - 4\left(2 - \lambda^2\right) = 16 - 8 + 4\lambda^2 =$

$= 4\lambda^2 + 8 > 0$, άρα η $\left(1\right)$ έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) i) $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha} = \dfrac{4}{1} = 4$

ii) $P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{2 - \lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$

γ) i) Αν $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, τότε

$S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow 4 = 2 + \sqrt{3} + x_2 \Leftrightarrow$

$x_2 = 4 - 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3}.$

ii) $P = x_1 x_2 \Leftrightarrow 2 - \lambda^2 = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(2 - \sqrt{3}\right) \Leftrightarrow$

$2 - \lambda^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

ΘΕΜΑ 4_4551

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - \left(\lambda^2 + 1\right)x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} - \left\{0\right\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα *Δ* του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0\right\}$. (*Μονάδες 8*)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (*Μονάδες 5*)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 6*)

ii) να αποδείξετε ότι $\left|x_1 + x_2\right| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) $\Delta = \left[-\left(\lambda^2 + 1\right)\right]^2 - 4\lambda \cdot \lambda = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 - 4\lambda^2 =$

$= \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 - 1\right)^2 \geq 0,$

άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \left\{0\right\}$.

β) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-\left(\lambda^2 + 1\right)}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$ και

$P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1.$

γ) i) Ισχύει $P = 1 > 0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Για $\lambda < 0$ έχουμε $S = \dfrac{\overbrace{\lambda^2 + 1}^{(+)}}{\underbrace{\lambda}_{(-)}} < 0$, άρα το τριώνυμο έχει αρνητικές ρίζες.

ii) $\left|x_1+x_2\right| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \overset{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}<0}{\Longleftrightarrow} -\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 2 \overset{\cdot\lambda<0}{\Leftrightarrow}$

$-\lambda^2-1 \leq 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 \geq 0,$

που ισχύει.

ΘΕΜΑ 4_4654

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4-7x^2+12=0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (*Μονάδες 10*)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4+\beta x^2+\gamma=0 \quad (1)$$

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta<0$, $\gamma>0$ και $\beta^2-4\gamma>0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) $x^4-7x^2+12=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-7x^2+12=0 \quad (*)$

Θέτουμε $x^2=\omega$ και η $(*)$ γράφεται

$\omega^2-7\omega+12=0.$

$\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot12=49-48=1>0,$ άρα

$$\omega_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1=\dfrac{7-1}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ \omega_2=\dfrac{7+1}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \end{cases}.$$

- Για $\omega=3$ έχουμε $x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$.
- Για $\omega=4$ έχουμε $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm2$.

Τελικά, η εξίσωση $x^4-7x^2+12=0$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις $x_1=-2, x_2=-\sqrt{3}, x_3=\sqrt{3}, x_4=2.$

β) $x^4+\beta x^2+\gamma=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2+\beta x^2+\gamma=0 \quad (1)$

Θέτουμε $x^2=\omega$ και η (1) γράφεται

$\omega^2+\beta\omega+\gamma=0 \ (2).$

Για τη (2) έχουμε $\Delta=\beta^2-4\gamma>0$ από υπόθεση, άρα η (2) έχει δύο ρίζες διαφορετικές, έστω ω_1, ω_2, για τις οποίες ισχύει:

- $P=\omega_1\omega_2=\gamma>0,$ άρα οι ρίζες ω_1, ω_2 είναι ομόσημες.
- $S=\omega_1+\omega_2=-\beta>0$ (αφού $\beta<0$), άρα οι ρίζες είναι και οι δύο θετικές.

Επομένως για $\omega=\omega_1>0$ προκύπτει

$x^2=\omega_1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_1}$, ενώ για $\omega=\omega_2>0$

προκύπτει $x^2=\omega_2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\omega_2}$. Τελικά, η (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4_4659

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\dfrac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (*Μονάδες 10*)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$. (*Μονάδες 5*)

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$$ (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Έχουμε $|\alpha|\leq\dfrac{5}{2} \overset{|\alpha|>0}{\Longleftrightarrow} |\alpha|^2 \leq \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2\leq\dfrac{25}{4} \Leftrightarrow$

$4\alpha^2\leq25 \Leftrightarrow 25-4\alpha^2\geq0 \ (1).$

$\Delta=(-5)^2-4\alpha\cdot\alpha=25-4\alpha^2\geq0,$ από τη σχέση (1).

Άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς και, επειδή το γινόμενό τους είναι $P=x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\alpha}{\alpha}=1,$ οι αριθμοί αυτοί είναι αντίστροφοι.

β) Για $\alpha=2$ η εξίσωση γράφεται $2x^2-5x+2=0.$

Έχουμε $\Delta=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=25-16=9>0,$ οπότε

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot2}=\frac{5\pm3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{5+3}{4}=\dfrac{8}{4}=2 \\ x_2=\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

γ) Για $x+\frac{1}{x}=y$ η εξίσωση

$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$ γίνεται

$2y^2-5y+2=0$. Από το ερώτημα (β) έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και $\frac{1}{2}$. Για $y=2$ έχουμε

$x+\frac{1}{x}=2\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^2+x\frac{1}{x}=2x\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow$

$(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$, δεκτή. Για $y=\frac{1}{2}$ έχουμε

$x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}2x^2+2x\frac{1}{x}=2x\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$2x^2+2=x\Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$.

$\Delta=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 2=1-16=-15<0$, αδύνατη.

Τελικά, $x=1$.

ΘΕΜΑ 4_4665

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0\ (1)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(*Μονάδες 5*)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(*Μονάδες 10*)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)(x_2-2)=-4$

(*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\Delta=(-\lambda)^2-4\cdot 1\cdot\left[-(\lambda^2+5)\right]=$

$=\lambda^2+4\lambda^2+20=5\lambda^2+20$

β) $5\lambda^2+20>0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Αρχικά βρίσκουμε $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$ και

$P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-(\lambda^2+5)$.

Έχουμε

$(x_1-2)(x_2-2)=-4\Leftrightarrow x_1x_2-2x_1-2x_2+4=-4\Leftrightarrow$

$x_1x_2-2(x_1+x_2)+8=0\Leftrightarrow-(\lambda^2+5)-2\lambda+8=0\Leftrightarrow$

$-\lambda^2-5-2\lambda+8=0\Leftrightarrow-\lambda^2-2\lambda+3=0$.

$\Delta=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 3=4+12=16>0$, οπότε

$\lambda_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{-2}=\frac{2\pm 4}{-2}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda_1=\frac{2+4}{-2}=\frac{6}{-2}=-3\\ \lambda_2=\frac{2-4}{-2}=\frac{-2}{-2}=1\end{cases}.$$

ΘΕΜΑ 4_4667

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2-3x-4=0\ (1)$

(*Μονάδες 10*)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(*Μονάδες 7*)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=9+16=25>0$, οπότε

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4\\ x_2=\frac{3-5}{2}=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}.$$

β) Αφού α,β ομόσημοι, τότε $\alpha\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta}>0$.

i) Για $x=\frac{\alpha}{\beta}$ η (1) γίνεται:

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)-4=0\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{3\alpha}{\beta}-4=0\overset{\cdot\beta^2\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$, που ισχύει.

ii) Αφού ο $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) και

$\frac{\alpha}{\beta} > 0$, $\frac{\alpha}{\beta} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\beta$, δηλαδή ο α είναι τετραπλάσιος του β.

ΘΕΜΑ 4_4681

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (*Μονάδες 10*)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες; (*Μονάδες 6*)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) =$

$= 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = (1 - 2\lambda)^2 \geq 0$, άρα η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ίσες, πρέπει

$\Delta = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$.

γ) Αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$, για τις ρίζες x_1, x_2 της (1) ισχύει $x_1 \neq x_2$. Έχουμε

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{|x_1 - x_2|} \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 1 \overset{S=1}{\underset{P=\lambda-\lambda^2}{\Longleftrightarrow}}$$

$$1^2 - 4(\lambda - \lambda^2) = 1 \Leftrightarrow 4(\lambda - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 1).$$

Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές.

ΘΕΜΑ 4_4835

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β. (*Μονάδες 6*)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (*Μονάδες 7*)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Ισχύει $x_1 + x_2 = S = \beta$. Άρα

$|x_1 + x_2| = 4 \Leftrightarrow |\beta| = 4 \Leftrightarrow (\beta = 4 \text{ ή } \beta = -4)$.

β) Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, ισχύει

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma > 0 \overset{\beta=\pm 4}{\Longleftrightarrow}$$

$$16 - 4\gamma > 0 \Leftrightarrow 4\gamma < 16 \Leftrightarrow \gamma < \frac{16}{4} \Leftrightarrow \gamma < 4.$$

γ) Έχουμε $x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \overset{|x|^2 = x^2}{\Longleftrightarrow} |x|^2 - \beta|x| + 3 = 0$.

Για $|x| = \omega$, η εξίσωση γράφεται

$\omega^2 - \beta\omega + 3 = 0$ (2).

- Για $\beta = 4$, η (2) γράφεται $\omega^2 - 4\omega + 3 = 0$ με $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ και

$$\omega_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \omega_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}.$$

Για $\omega = 3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$, ενώ για $\omega = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = -1)$.

- Για $\beta = -4$, η (2) γράφεται $\omega^2 + 4\omega + 3 = 0$ με $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ και

$$\omega_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \omega_2 = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}.$$

Για $\omega=-3 \Leftrightarrow |x|=-3$, αδύνατη, και για

$\omega=-1 \Leftrightarrow |x|=-1$, αδύνατη.

Άρα η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες για $\beta=-4$.

ΘΕΜΑ 4_4857

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2-\left(\alpha^2+\beta^2\right)x+\alpha\beta=0$ όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2$ (*Μονάδες 8*)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β, ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β. (*Μονάδες 10*)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι: $(1+x_1)(1+x_2)\geq 4$. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) $\Delta=\left[-\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right]^2-4\alpha\beta\cdot\alpha\beta=$

$=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-4\alpha^2\beta^2=$

$=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=$

$=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2$

β) Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες άνισες, πρέπει

$\Delta>0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2-\beta^2\right)^2>0 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2\neq 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\neq 0 \Leftrightarrow (\alpha\neq\beta \text{ και } \alpha\neq-\beta)$.

Επειδή α, β δύο θετικοί αριθμοί, αρκεί $\alpha\neq\beta$.

$$x_{1,2}=\frac{\alpha^2+\beta^2\pm\sqrt{\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2}}{2\alpha\beta}=$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2\pm\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{2\alpha\beta}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{2\alpha^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha}{\beta} \\ x_2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{2\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

γ) Έχουμε $S=x_1+x_2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ και $P=x_1x_2=1$.

$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2\geq 4 \Leftrightarrow$

$S+P\geq 4-1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+1\geq 3 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\geq 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

ΘΕΜΑ 4_4903

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (*Μονάδες 8*)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (*Μονάδες 7*)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\Delta=(2\lambda-1)^2-4\lambda(\lambda-1)=$

$=4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2+4\lambda=1$, ανεξάρτητη του λ.

β) $x_{1,2}=\frac{-(2\lambda-1)\pm\sqrt{1}}{2\lambda}=\frac{-2\lambda+1\pm 1}{2\lambda}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-2\lambda+1+1}{2\lambda}=\dfrac{-2\lambda+2}{2\lambda}=-1+\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2=\dfrac{-2\lambda+1-1}{2\lambda}=\dfrac{-2\lambda}{2\lambda}=-1 \end{cases}.$$

γ) $d(x_1,x_2)=2 \Leftrightarrow |x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\lambda}-1+1\right|=2 \Leftrightarrow$

$\left|\frac{1}{\lambda}\right|=2 \Leftrightarrow \frac{1}{|\lambda|}=2 \Leftrightarrow |\lambda|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 4_4957

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (*Μονάδες 8*)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (*Μονάδες 5*)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 6*)

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι

$\sqrt{x_1x_2}\le\dfrac{x_1+x_2}{2}$. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) $\alpha=\lambda,\ \beta=-\left(\lambda^2+1\right),\ \gamma=\lambda$, επομένως

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[-\left(\lambda^2+1\right)\right]^2-4\lambda^2=$$

$$=\left(\lambda^2+1\right)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=$$

$$=\lambda^4-2\lambda^2+1=\left(\lambda^2-1\right)^2\ge 0,\ \text{για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}.$$

Άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Έχουμε $S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-\left(\lambda^2+1\right)}{\lambda}=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}=$

$$=\frac{\lambda^2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\lambda+\frac{1}{\lambda}\ \text{ και } P=x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\lambda}{\lambda}=1.$$

γ) Ισχύει $P=1>0$, άρα το τριώνυμο έχει ρίζες ομόσημες.

Αφού $\lambda>0$, τότε και $\dfrac{1}{\lambda}>0$, άρα $S=\lambda+\dfrac{1}{\lambda}>0$,

επομένως το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές.

δ) $\sqrt{x_1x_2}\le\dfrac{x_1+x_2}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x_1x_2}\le x_1+x_2 \overset{x_1x_2=1}{\underset{x_1+x_2=\lambda+\frac{1}{\lambda}}{\Longleftrightarrow}}$

$$2\cdot 1\le\lambda+\frac{1}{\lambda}\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow}2\lambda\le\lambda^2+1\Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-2\lambda+1\ge 0\Leftrightarrow\left(\lambda-1\right)^2\ge 0,\ \text{ που ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 4_4962

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2-\left(\lambda^2+1\right)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$. (*Μονάδες 8*)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (*Μονάδες 5*)

γ) Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 6*)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1. (*Μονάδες 6*)

Λύση

α) $\Delta=\left[-\left(\lambda^2+1\right)\right]^2-4\lambda\cdot\lambda=\left(\lambda^2+1\right)^2-4\lambda^2=$

$$=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=\left(\lambda^2-1\right)^2\ge 0,$$

άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) $S=x_1+x_2=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και $P=x_1x_2=\dfrac{\lambda}{\lambda}=1$.

γ) Αφού $P=1>0$, οι ρίζες είναι ομόσημες, ή και οι δύο θετικές ή και οι δύο αρνητικές. Όμως $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$ και, αφού $\lambda>0$, $S>0$, άρα οι ρίζες είναι και οι δύο θετικές.

δ) Έχουμε $\dfrac{x_1+x_2}{2}-1=\dfrac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2}-1=\dfrac{\lambda^2+1}{2\lambda}-\dfrac{2\lambda}{2\lambda}=$

$$=\frac{\lambda^2-2\lambda+1}{2\lambda}=\frac{\left(\lambda-1\right)^2}{2\lambda}>0\ \text{ για } 0<\lambda\neq 1,\ \text{ άρα}$$

$\dfrac{x_1+x_2}{2}>1$.

ΘΕΜΑ 4_4970

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2+\lambda x-36=0\ (1)$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(*Μονάδες 8*)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-\lambda x-36=0$. (*Μονάδες 7*)

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2+\lambda x+2=0$ (*Μονάδες 4 + 6 = 10*)

Λύση

α) $\Delta=\lambda^2-4\cdot 2\cdot(-36)=\lambda^2+288>0$, άρα η (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή του λ.

β) Αφού ο ρ είναι ρίζα της (1), θα ισχύει $2\rho^2+\lambda\rho-36=0 \ (2)$.

i) Για να είναι ο $-\rho$ ρίζα, θα πρέπει

$2(-\rho)^2-\lambda(-\rho)-36=0 \Leftrightarrow 2\rho^2+\lambda\rho-36=0$,

που ισχύει λόγω της (2).

ii) • Έστω $\rho=0$. Τότε η (1) δίνει

$2\cdot 0^2+\lambda\cdot 0-36=0 \Rightarrow -36=0$, άτοπο,

άρα $\rho\neq 0$.

• Για να είναι ο $\dfrac{1}{\rho}$ ρίζα της εξίσωσης

$-36x^2+\lambda x+2=0$, θα πρέπει

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\lambda\frac{1}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow \frac{-36}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-36}{\rho^2}+\frac{\lambda\rho}{\rho^2}+\frac{2\rho^2}{\rho^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2\rho^2+\lambda\rho-36}{\rho^2}=0,$$

που ισχύει λόγω της (2).

ΘΕΜΑ 4_4975

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-8x^2-9=0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(*Μονάδες 10*)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0 \ (1)$ με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma<0$ τότε

i) $\beta^2-4\gamma>0$ (*Μονάδες 3*)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (*Μονάδες 12*)

Λύση

α) Έχουμε $x^4-8x^2-9=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-8x^2-9=0$,

άρα θέτοντας $x^2=\omega\geq 0$ προκύπτει η εξίσωση

$\omega^2-8\omega-9=0$, την οποία λύνουμε:

$\alpha=1,\ \beta=-8,\ \gamma=-9$, άρα

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 1\cdot(-9)=$

$=64+36=100>0$, οπότε

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\omega_1=\dfrac{8+10}{2}=9>0, \text{ δεκτή}\\ \omega_2=\dfrac{8-10}{2}=-1<0, \text{ απορρίπτεται}\end{cases}.$$

Άρα $\omega=9\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow (x=3$ ή $x=-3)$.

β) Έχουμε $x^4+\beta x^2+\gamma=0\Leftrightarrow (x^2)^2+\beta x^2+\gamma=0$,

άρα θέτοντας $x^2=\omega\geq 0$ προκύπτει η εξίσωση

$\omega^2+\beta\omega+\gamma=0 \ (2)$, με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma$.

i) Αν $\gamma<0 \overset{\cdot(-4)}{\Leftrightarrow} -4\gamma>-4\cdot 0\Leftrightarrow -4\gamma>0$ και $\beta^2\geq 0$, άρα με πρόσθεση κατά μέλη $\beta^2-4\gamma>0$ (υπερισχύει η γνήσια ανισότητα).

ii) $\Delta=\beta^2-4\gamma>0$, άρα η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες άνισες, τις ω_1 και ω_2.

Το γινόμενο των ριζών είναι $P=\gamma<0$, άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

Αν $\omega_1>0$ και $\omega_2<0$, τότε η $x^2=\omega_1$ έχει δύο ρίζες, ενώ η $x^2=\omega_2$ είναι αδύνατη.

Τελικά, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

Τα ίδια συμπεράσματα βγαίνουν αν $\omega_1<0$ και $\omega_2>0$.

ΘΕΜΑ 4_4992

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34\,cm$ και διαγώνιο $\delta = 13\,cm$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\,cm^2$. (*Μονάδες 5*)

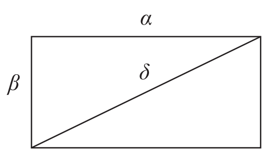
ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (*Μονάδες 5*)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (*Μονάδες 5*)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40\,cm^2$ και διαγώνιο $8\,cm$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α)



Έστω α και β οι διαστάσεις του ορθογωνίου. Τότε έχουμε $\Pi = 2\alpha + 2\beta$ και $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

i) Έχουμε $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 34 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 13^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 17 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} (\alpha+\beta)^2 = 17^2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 169 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 289 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 169 \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow}$

$2\alpha\beta = 289 - 169 \Rightarrow 2\alpha\beta = 120 \Rightarrow$
$\alpha\beta = 60 \Rightarrow E = 60\,cm^2$.

ii) Αφού η εξίσωση έχει ρίζες τα μήκη α και β, θα ισχύει $S = \alpha + \beta = 17$ και $P = \alpha\beta = 60$. Άρα η εξίσωση έχει τη μορφή
$x^2 - 17x + 60 = 0 \ (2)$.

iii) Η (2) έχει διακρίνουσα

$\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 60 = 289 - 240 = 49 > 0$,

άρα $x_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \dfrac{17 \pm 7}{2} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{17+7}{2} = \dfrac{24}{2} = 12 \\ x_2 = \dfrac{17-7}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \end{cases}$. Συνεπώς η μία πλευρά του ορθογωνίου έχει μήκος $12\,cm$ και η άλλη $5\,cm$.

β) Αν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο, τότε γι' αυτό θα ισχύει $\alpha\beta = 40$ και

$\alpha^2 + \beta^2 = 8^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 64 \Rightarrow$

$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 64 \overset{\alpha\beta=40}{\Longrightarrow} (\alpha+\beta)^2 - 80 = 64 \Rightarrow$

$(\alpha+\beta)^2 = 144 \overset{\alpha+\beta>0}{\Longrightarrow} \alpha + \beta = 12$, οπότε, όπως στο ερώτημα (α.ii), συμπεραίνουμε ότι τα μήκη αυτού του ορθογωνίου θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 12x + 40 = 0$, η οποία όμως έχει $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 40 = 144 - 160 = -16 < 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη. Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοιο ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4_5317

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση

$$x^4 - 9x^2 + 20 = 0$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (*Μονάδες 10*)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε. (*Μονάδες 15*)

Λύση

α) Έχουμε $x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 9x^2 + 20 = 0$,

άρα θέτοντας $x^2 = \omega \geq 0$ προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 - 9\omega + 20 = 0$, την οποία λύνουμε:
$\alpha = 1,\ \beta = -9,\ \gamma = 20$, άρα
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1 > 0$,

οπότε $\omega_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{9+1}{2} = 5 > 0, \text{ δεκτή} \\ \omega_2 = \dfrac{9-1}{2} = 4 > 0, \text{ δεκτή} \end{cases}$.

- Για $\omega = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{5} \text{ ή } x = -\sqrt{5}\right)$.
- Για $\omega = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ή } x = -2\right)$.

Άρα η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Αν $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \ (1)$, τότε θέτοντας $x^2 = \omega$

προκύπτει η εξίσωση $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0 \quad (2)$, με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\gamma$.

Για να έχει η (1) δύο πραγματικές ρίζες, πρέπει η (2) να έχει μία μόνο θετική ρίζα.

Αυτό συμβαίνει είτε αν

$\Delta=0 \Leftrightarrow \beta^2-4\gamma=0 \Leftrightarrow \beta^2=4\gamma$ με $\beta<0$,

ώστε η διπλή ρίζα $-\dfrac{\beta}{2}$ να είναι θετική, είτε αν

$\Delta=\beta^2-4\gamma>0$ και $P=\gamma<0$, ώστε οι ρίζες να είναι ετερόσημες.

Για την 1η περίπτωση:

$x^4-4x^2+4=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-4x^2+4=0$, άρα

θέτοντας $x^2=\omega\geq 0$ προκύπτει η εξίσωση

$\omega^2-4\omega+4=0 \Leftrightarrow (\omega-2)^2=0 \Leftrightarrow$

$\omega=2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow \left(x=\sqrt{2} \text{ ή } x=-\sqrt{2}\right)$.

Για τη 2η περίπτωση:

$x^4-2x^2-3=0 \Leftrightarrow \left(x^2\right)^2-2x^2-3=0$, άρα

θέτοντας $x^2=\omega\geq 0$ προκύπτει η εξίσωση

$\omega^2-2\omega-3=0$, με

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$, οπότε

$$\omega_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \omega_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1=\dfrac{2+4}{2}=3, \text{ δεκτή} \\ \omega_2=\dfrac{2-4}{2}=-1, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}.$$

Άρα $\omega=3 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow \left(x=\sqrt{3} \text{ ή } x=-\sqrt{3}\right)$.

ΘΕΜΑ 4_6223

Δίνεται η εξίσωση $x^2-5\lambda x-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (*Μονάδες 7*)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1x_2)^{24}=0$. (*Μονάδες 9*)

ii) Για $\lambda=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2$. (*Μονάδες 9*)

Λύση

α) $\alpha=1$, $\beta=-5\lambda$ και $\gamma=-1$, άρα

$\Delta=(-5\lambda)^2-4\cdot 1\cdot(-1)=25\lambda^2+4>0$, επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Έχουμε $x_1+x_2=S=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{-5\lambda}{1}=5\lambda$ και

$x_1x_2=P=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

i) $(x_1+x_2)^2-18-7(x_1x_2)^{24}=0 \Leftrightarrow$

$(5\lambda)^2-18-7\cdot(-1)^{24}=0 \Leftrightarrow$

$25\lambda^2-18-7=0 \Leftrightarrow 25\lambda^2=25 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow$

$(\lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1)$.

ii) $x_1^2x_2-3x_1+4-3x_2+x_1x_2^2=$

$=x_1x_2(x_1+x_2)+4-3(x_1+x_2)=$

$=-1\cdot 5\lambda+4-3\cdot 5\lambda=-5\lambda+4-15\lambda=$

$=4-20\lambda\overset{\lambda=1}{=}4-20=-16$

ΘΕΜΑ 4_7263

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-6x+\lambda-7$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. (*Μονάδες 7*)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S=x_1+x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών. (*Μονάδες 2*)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7<\lambda<16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 4*)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2-6|x|+\lambda=7 \quad (1)$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (*Μονάδες 8*)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda=3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 4*)

Λύση

α) $\alpha = 1,\ \beta = -6,\ \gamma = \lambda - 7$, άρα
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda - 7) =$
$= 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda$.
Για να έχει το τριώνυμο πραγματικές ρίζες, πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$.
Άρα $\lambda \in (-\infty, 16]$.

β) i) $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-6}{1} = 6$,

$P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\lambda - 7}{1} = \lambda - 7$

ii) Για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$ ισχύει ότι $\lambda \in (-\infty, 16]$, άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, $\lambda \neq 16$, άρα $\Delta \neq 0$, επομένως έχει δύο ρίζες άνισες.
Ακόμα, $\lambda > 7 \Leftrightarrow \lambda - 7 > 0 \Leftrightarrow P > 0$, άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.
Όμως $S = 6 > 0$, άρα οι ρίζες είναι θετικές.

γ) i) $(1) \overset{x^2 = |x|^2}{\Longleftrightarrow} |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$, οπότε θέτοντας $|x| = \omega \geq 0$ έχουμε $\omega^2 - 6\omega + \lambda - 7 = 0\ (2)$.
Αν ρ ρίζα της (2), τότε $\omega = \rho \Leftrightarrow |x| = \rho$.
Η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες μόνο αν $\rho > 0$.
Άρα, για να έχει τέσσερις ρίζες η (1), αρκεί ισοδύναμα να εξετάσουμε πότε έχει η (2) δύο θετικές ρίζες άνισες μεταξύ τους (οπότε από καθεμία προκύπτουν δύο ρίζες της (1)).
Αυτό συμβαίνει όταν
$\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 - 4(\lambda - 7) > 0 \Leftrightarrow 36 - 4\lambda + 28 > 0 \Leftrightarrow$
$64 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda < 64 \Leftrightarrow \lambda < 16$ και
$P > 0 \Leftrightarrow \lambda - 7 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 7$ και $S > 0 \Leftrightarrow 6 > 0$, που ισχύει.
Τελικά, το ζητούμενο ισχύει μόνο για $\lambda \in (7, 16)$.

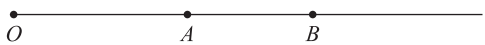
ii) Ισχύει $\left(3\sqrt{10}\right)^2 = 3^2\sqrt{10}^2 = 9\cdot 10 = 90$,
$7^2 = 49$ και $16^2 = 256$.
Άρα $49 < 90 < 256 \Leftrightarrow 7^2 < \left(3\sqrt{10}\right)^2 < 16^2 \Leftrightarrow$
$7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{10} \in (7, 16)$.
Επομένως από την απάντηση του (γ.i) η (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

ΘΕΜΑ 4_7510

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B,\ s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} \text{ και } |s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A, B παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.



α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (*Μονάδες 12*)

β) Αν, επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε km ικανοποιούν τις σχέσεις
$s_A + s_B = 1{,}4$ και $s_A \cdot s_B = 0{,}45$ τότε:
i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B. (*Μονάδες 6*)
ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ. (*Μονάδες 7*)

Λύση

α) Έχουμε $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B| \Leftrightarrow (s_\Delta - s_A = s_\Delta - s_B$ ή $s_\Delta - s_A = s_B - s_\Delta) \Leftrightarrow$
$\left(s_A = s_B\text{, αδύνατη, ή } s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2}\right)$.

Τελικά, $s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2}$, άρα το σπίτι της Δήμητρας βρίσκεται στο μέσο της διαδρομής από το σπίτι της Άννας στο σπίτι του Βαγγέλη.

Ισχύει $s_A < s_\Delta < s_B$. Για το s_Γ έχουμε:

• Έστω $s_\Gamma > s_B \Leftrightarrow \frac{s_A + 3s_B}{4} > s_B \Leftrightarrow$

$s_A + 3s_B > 4s_B \Leftrightarrow s_A > s_B$, άτοπο, άρα $s_\Gamma \le s_B$.

Αν $s_\Gamma = s_B$, τότε η σχέση $s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4}$ γράφεται

$s_B = \frac{s_A + 3s_B}{4} \Leftrightarrow 4s_B = s_A + 3s_B \Leftrightarrow s_B = s_A$, άτοπο.

Τελικά, $s_\Gamma < s_B$.

• Έστω $s_\Gamma > s_\Delta \Leftrightarrow \frac{s_A + 3s_B}{4} > \frac{s_A + s_B}{2} \Leftrightarrow$

$2s_A + 6s_B > 4s_A + 4s_B \Leftrightarrow$

$6s_B - 4s_B > 4s_A - 2s_A \Leftrightarrow s_B > s_A$, που ισχύει από υπόθεση, άρα $s_\Gamma > s_\Delta$.

Τελικά, $s_A < s_\Delta < s_\Gamma < s_B$, οπότε ο αξόνας παίρνει τη μορφή:

β) i) Μία τέτοια εξίσωση είναι η $x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0$.

ii) Λύνουμε την εξίσωση $x^2 - 1{,}4x + 0{,}45 = 0$:

$\Delta = (-1{,}4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}45 =$

$= 1{,}96 - 1{,}8 = 0{,}16 > 0$, άρα

$x_{1,2} = \frac{1{,}4 \pm \sqrt{0{,}16}}{2} = \frac{1{,}4 \pm 0{,}4}{2} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 = \frac{1{,}4 + 0{,}4}{2} = \frac{1{,}8}{2} = 0{,}9 \\ x_2 = \frac{1{,}4 - 0{,}4}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \end{cases}$. Οι αποστάσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη από το σχολείο (s_A και s_B αντίστοιχα) είναι οι ρίζες της εξίσωσης και, αφού $s_B > s_A$, προκύπτει ότι $s_B = 0{,}9\,km$ και $s_A = 0{,}5\,km$. Επομένως

$s_\Gamma = \frac{0{,}5 + 3 \cdot 0{,}9}{4} = \frac{0{,}5 + 2{,}7}{4} = \frac{3{,}2}{4} = 0{,}8\,km$ και

$s_\Delta = \frac{0{,}5 + 0{,}9}{2} = \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7\,km.$

ΘΕΜΑ 4_7515

Δίνεται η εξίσωση:

$x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (*Μονάδες 6*)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$. (*Μονάδες 4*)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$. (*Μονάδες 7*)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ. (*Μονάδες 8*)

Λύση

α) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \lambda = 4 - 4\lambda = 4(1 - \lambda) > 0$, αφού $\lambda < 1$, άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-2}{1} = 2$

γ) i) $|x_1 - 2| = |x_2 + 2| \Leftrightarrow (x_1 - 2 = x_2 + 2$ ή $x_1 - 2 = -x_2 - 2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 4$ ή $x_1 + x_2 = 0$, αδύνατη λόγω του (β)), άρα $x_1 - x_2 = 4$.

ii) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$. Για $x_1 = 3$ η σχέση $x_1 + x_2 = 2$ γράφεται

$3 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = -1$.

Ισχύει $P = x_1 x_2 \Rightarrow \lambda = 3 \cdot (-1) \Rightarrow \lambda = -3$.

ΘΕΜΑ 4_7516

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (*Μονάδες 5*)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$. (*Μονάδες 10*)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (*Μονάδες 10*)

Λύση

α) $\Delta = \left[-(\alpha^2 - 1)\right]^2 - 4\alpha \cdot (-\alpha) = (\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2 =$

$= \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 1 = (\alpha^2 + 1)^2$

β) $\Delta=\left(\alpha^2+1\right)^2>0$, αφού $\alpha^2+1\neq 0$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$. Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες $\rho_{1,2}=\dfrac{-\left[-\left(\alpha^2-1\right)\right]\pm\sqrt{\left(\alpha^2+1\right)^2}}{2\alpha}=$

$$=\frac{\alpha^2-1\pm\left|\alpha^2+1\right|}{2\alpha}=\frac{\alpha^2-1\pm\left(\alpha^2+1\right)}{2\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\rho_1=\dfrac{\alpha^2-1+\left(\alpha^2+1\right)}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-1+\alpha^2+1}{2\alpha}=\alpha\\ \rho_2=\dfrac{\alpha^2-1-\left(\alpha^2+1\right)}{2\alpha}=\dfrac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha}=-\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}.$$

γ) $\left|\rho_1-\rho_2\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha-\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\right|=2\Leftrightarrow\left|\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\frac{\left|\alpha^2+1\right|}{|\alpha|}=2\overset{\alpha^2+1>0}{\Longleftrightarrow}\frac{\alpha^2+1}{|\alpha|}=2\Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+1=2|\alpha|\Leftrightarrow|\alpha|^2+1=2|\alpha|\Leftrightarrow$$

$$|\alpha|^2-2|\alpha|+1=0\Leftrightarrow\left(|\alpha|-1\right)^2=0\Leftrightarrow|\alpha|=1\Leftrightarrow$$

$(\alpha=1$ ή $\alpha=-1)$, δεκτές.

ΘΕΜΑ 4_7940

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2-14x+8=0 \quad (1)$$

και

$$8x^2-14x+3=0 \quad (2)$$

(*Μονάδες 10*)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (3) και $\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (4), με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i) $\rho\neq 0$ και (*Μονάδες 5*)

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(*Μονάδες 10*)

Λύση

α) Για την (1): $\alpha=3$, $\beta=-14$, $\gamma=8$, οπότε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-14)^2-4\cdot 3\cdot 8=$$
$$=196-96=100>0, \text{ άρα}$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 3}=\frac{14\pm 10}{6}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{14+10}{6}=\dfrac{24}{6}=4\\ x_2=\dfrac{14-10}{6}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

Για τη (2): $\alpha=8$, $\beta=-14$, $\gamma=3$, οπότε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-14)^2-4\cdot 8\cdot 3=$$
$$=196-96=100>0,$$

άρα $x_{1,2}=\dfrac{-(-14)\pm\sqrt{100}}{2\cdot 8}=\dfrac{14\pm 10}{16}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{14+10}{16}=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2}\\ x_2=\dfrac{14-10}{16}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}\end{cases}.$$

β) Αφού ρ ρίζα της (3), θα ισχύει $\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma=0$ (5).

i) Αν $\rho=0$, τότε

$(5)\Leftrightarrow\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+\gamma=0\Leftrightarrow\gamma=0$, που είναι άτοπο, γιατί $\alpha\gamma\neq 0$.

Άρα $\rho\neq 0$.

ii) Για $x=\dfrac{1}{\rho}$ η (4) γίνεται:

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\beta\frac{1}{\rho}+\alpha=0\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\rho^2}+\frac{\beta}{\rho}+\alpha=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma}{\rho^2}+\frac{\beta\rho}{\rho^2}+\frac{\alpha\rho^2}{\rho^2}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2}{\rho^2}=0\Leftrightarrow\frac{\alpha\rho^2+\beta\rho+\gamma}{\rho^2}=0,$$

που ισχύει από (5).