

Ελευθέριος Πρωτοπαπάς

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΛΙΓΟ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
(ΘΕΜΑΤΑ ΤΕΛΕΥΤΑΙΑΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ)

Επιπλέον θέματα για την τελευταία επανάληψη για το βιβλίο
Μεθοδολογία Άλγεβρας Β΄ Γενικού Λυκείου (β΄ τόμος)
του Ε. Πρωτοπαπά, το οποίο κυκλοφορεί από τις Εκδόσεις Πατάκη.
Για να δείτε το βιβλίο, κάντε κλικ [εδώ](#).

1. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \frac{\sigma\upsilon\nu 390^\circ + \eta\mu 1.110^\circ - \sigma\phi 765^\circ}{\eta\mu 3.630^\circ + \sigma\upsilon\nu 1.830^\circ - \epsilon\phi 405^\circ},$$

$$\beta) B = \frac{\eta\mu \frac{21\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} - \epsilon\phi \left(-\frac{7\pi}{3} \right)}{\sigma\upsilon\nu \frac{19\pi}{2} + \eta\mu \frac{7\pi}{4} - \sigma\phi \frac{5\pi}{4}}.$$

2. Αν $540^\circ < x < 630^\circ$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$A = \eta\mu^2 x \epsilon\phi x + 3\sigma\phi x + 4\epsilon\phi x \sigma\phi x + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x.$$

3. Αν $\frac{9\pi}{2} < \omega < 5\pi$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$B = \sigma\upsilon\nu^7 \omega + 2\eta\mu^8 \omega \epsilon\phi \omega + \sigma\upsilon\nu \omega \epsilon\phi^6 \omega.$$

4. Αν $\eta\mu x = \frac{2}{5}$, με $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

5. Αν $\epsilon\phi \alpha = 3$, με $360^\circ < \alpha < 450^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu \alpha - 3\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - \epsilon\phi^2 \alpha + \epsilon\phi \alpha \sigma\phi \alpha - 2.$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (2\eta\mu\omega + 9\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (9\eta\mu\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 85,$$

$$\beta) 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 8 > 0.$$

7. Αν $5\eta\mu\omega\eta\phi + 9\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\phi = 0$, να αποδείξετε για τις τιμές που έχει νόημα η ισότητα ότι:

$$\frac{1}{5\eta\mu^2\omega + 9\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{1}{5\eta\mu^2\phi + 9\sigma\upsilon\nu^2\phi} = \frac{14}{45}.$$

8. Να απλοποιήσετε τις ακόλουθες παραστάσεις για τις τιμές που έχουν νόημα:

$$\alpha) A = \eta\mu \left(\frac{3\pi}{2} + \omega \right) + \sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega) + \epsilon\phi(9\pi + \omega) - \sigma\phi \left(\frac{5\pi}{2} - \omega \right),$$

$$\beta) B = \frac{\epsilon\phi(270^\circ - \omega)\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega)\epsilon\phi(90^\circ + \omega)}{\eta\mu(90^\circ - \omega)\sigma\phi(540^\circ - \omega)\sigma\phi(270^\circ + \omega)}.$$

9. Να αποδείξετε τις ακόλουθες ισότητες για τις τιμές που έχουν νόημα:

$$\alpha) \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{4} - \omega \right) + \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{4} + \omega \right) = 1,$$

$$\beta) \epsilon\phi \left(\frac{\pi}{6} + \omega \right) \epsilon\phi \left(\frac{\pi}{3} - \omega \right) = 1.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 5\sigma\upsilon\nu \frac{3x}{2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f και σε ποιες θέσεις επιτυγχάνονται.

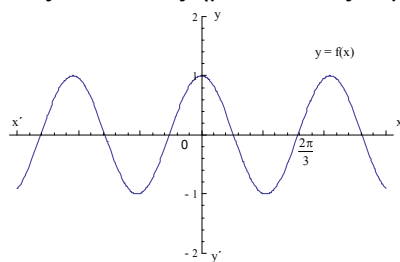
γ) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

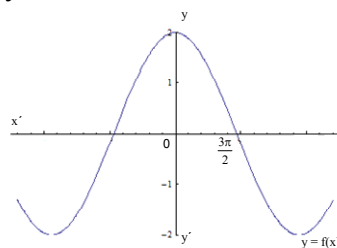
ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = a\eta\mu(\beta x)$, όπου $a, \beta > 0$, η οποία έχει περίοδο $T = 3\pi$ και παρουσιάζει μέγιστο ίσο με 3. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

- 12.** Να βρείτε τύπο της συνάρτησης f που έχει ως γραφική της παράσταση καθεμία από τις ακόλουθες ημιτονοειδείς καμπύλες:

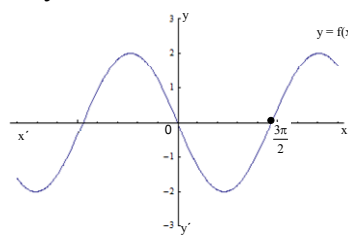
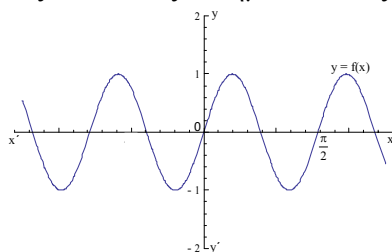


Σχήμα Α'



Σχήμα Β'

- 13.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που έχει ως γραφική της παράσταση καθεμία από τις ακόλουθες συνημιτονοειδείς καμπύλες:



- 14.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2\sigma\upsilon\upsilon x - \sqrt{3})(2\eta\mu x + 1) = 0$,

γ) $(\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\upsilon x - 1) = 0$,

β) $(\sqrt{3} + \epsilon\phi x)(1 + \sigma\phi x) = 0$,

δ) $(\sqrt{3} - 2\eta\mu x)(1 - 2\sigma\upsilon\upsilon x) = 0$.

- 15.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$,

γ) $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\upsilon 3x$,

β) $\sigma\upsilon\upsilon^2 x + 5\sigma\upsilon\upsilon x + 6 = 0$,

δ) $\eta\mu 2x = -\sigma\upsilon\upsilon 4x$.

- 16.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \sqrt{3} \sigma\upsilon\upsilon x$,

β) $3\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\upsilon^2 x$.

- 17.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\upsilon^2 x + \eta\mu x \sigma\upsilon\upsilon x = 0$,

γ) $2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x = \sqrt{2} \eta\mu x + \sqrt{2}$,

β) $\eta\mu^5 x = \eta\mu x$,

δ) $\eta\mu x \sigma\upsilon\upsilon x + \eta\mu x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\upsilon x$.

- 18.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu 3x = \frac{1}{2}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$,

β) $\epsilon\phi 2x = -1$, $x \in (-2\pi, 2\pi)$.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

7. α) $\sigma\upsilon\nu 390^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 1.110^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\phi 765^\circ = \sigma\phi 45^\circ = 1$,
 $\eta\mu 3.630^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 1.830^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\epsilon\phi 405^\circ = \epsilon\phi 45^\circ = 1$,
 άρα $A = 1$.

β) $\eta\mu \frac{21\pi}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$, $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\epsilon\phi\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\epsilon\phi \frac{7\pi}{3} = -\epsilon\phi \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$, $\sigma\upsilon\nu \frac{19\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$,
 $\eta\mu \frac{7\pi}{4} = -\eta\mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\phi \frac{5\pi}{4} = \sigma\phi \frac{\pi}{4} = 1$, άρα

$$B = \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-\sqrt{3})}{0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} = \frac{2 + \sqrt{3}}{-2 - \sqrt{2}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(-2 + \sqrt{2})}{(-2 - \sqrt{2})(-2 + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{-4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}.$$

8. Αφού $540^\circ < x < 630^\circ$, έχουμε $\eta\mu x < 0$, $\sigma\upsilon\nu x < 0$, $\epsilon\phi x > 0$, $\sigma\phi x > 0$, οπότε $A > 0$.

9. Αφού $\frac{9\pi}{2} < \omega < 5\pi$, έχουμε $\eta\mu \omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu \omega < 0$, $\epsilon\phi \omega < 0$, $\sigma\phi \omega < 0$, οπότε $A < 0$.

10. Αφού $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x < 0$.

Τότε: $\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$,

$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$ και $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

11. Αφού $360^\circ < \alpha < 450^\circ$, έχουμε ότι $\eta\mu \alpha > 0$.

Τότε: $\eta\mu^2 \alpha = \frac{\epsilon\phi^2 \alpha}{1 + \epsilon\phi^2 \alpha} = \frac{3^2}{1 + 3^2} = \frac{9}{10}$, άρα $\eta\mu \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\sigma\upsilon\nu \alpha = \frac{\eta\mu \alpha}{\epsilon\phi \alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, άρα

$$A = \frac{3\sqrt{10}}{10} - 3 \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \right)^2 - 3^2 + 1 - 2 = \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{3}{10} - 9 + 1 - 2 = \frac{3\sqrt{10} - 103}{10}.$$

12. α) $(2\eta\mu\omega + 9\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (9\eta\mu\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega)^2 =$
 $= 4\eta\mu^2\omega + 36\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + 81\sigma\upsilon\nu^2\omega + 81\eta\mu^2\omega - 36\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega =$
 $= 85\eta\mu^2\omega + 85\sigma\upsilon\nu^2\omega = 85.$

β) Θέτουμε $\sin x = \omega$, οπότε η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται: $3\omega^2 - 2\omega + 8 > 0$,
 η οποία ισχύει αφού το τριώνυμο $3\omega^2 - 2\omega + 8$ έχει $\Delta = -92 < 0$,
 άρα είναι ομόσημο του $a = 3$.

- 13.**
- Αν $\sin \omega = 0$, τότε $\eta\mu\omega = \pm 1$, $\eta\mu\varphi = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = \pm 1$, οπότε η ισότητα ισχύει.
 - Αν $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$, τότε $\eta\mu\varphi = \pm 1$, $\eta\mu\omega = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm 1$, οπότε η ισότητα ισχύει.
 - Αν $\sigma\upsilon\nu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi \neq 0$, τότε $5\epsilon\varphi\omega\epsilon\varphi + 9 = 0$ και $\epsilon\varphi^2\omega = \frac{81}{25\epsilon\varphi^2\varphi}$.

Τότε:

$$\frac{1}{5\eta\mu^2\omega + 9\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\frac{5\epsilon\varphi^2\omega}{1+\epsilon\varphi^2\omega} + \frac{9}{1+\epsilon\varphi^2\omega}} = \frac{1+\epsilon\varphi^2\omega}{5\epsilon\varphi^2\omega + 9} = \frac{1 + \frac{81}{25\epsilon\varphi^2\varphi}}{5\frac{81}{25\epsilon\varphi^2\varphi} + 9} =$$

$$= \frac{25\epsilon\varphi^2\varphi + 81}{45(9 + 5\epsilon\varphi^2\varphi)}$$

και

$$\frac{1}{5\eta\mu^2\varphi + 9\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \frac{1}{\frac{5\epsilon\varphi^2\varphi}{1+\epsilon\varphi^2\varphi} + \frac{9}{1+\epsilon\varphi^2\varphi}} = \frac{1+\epsilon\varphi^2\varphi}{5\epsilon\varphi^2\varphi + 9},$$

άρα

$$\frac{1}{5\eta\mu^2\omega + 9\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{1}{5\eta\mu^2\varphi + 9\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \frac{25\epsilon\varphi^2\varphi + 81}{45(9 + 5\epsilon\varphi^2\varphi)} + \frac{1 + \epsilon\varphi^2\varphi}{5\epsilon\varphi^2\varphi + 9} =$$

$$= \frac{25\epsilon\varphi^2\varphi + 81 + 45 + 45\epsilon\varphi^2\varphi}{45(9 + 5\epsilon\varphi^2\varphi)} = \frac{70\epsilon\varphi^2\varphi + 126}{45(5\epsilon\varphi^2\varphi + 9)} = \frac{14(5\epsilon\varphi^2\varphi + 9)}{45(5\epsilon\varphi^2\varphi + 9)} = \frac{14}{45}.$$

- 14. α)** $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\upsilon\nu(5\pi + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\varphi(9\pi + \omega) = \epsilon\varphi\omega$,
 $\sigma\varphi\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) = \epsilon\varphi\omega$, άρα $A = -\sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega + \epsilon\varphi\omega - \epsilon\varphi\omega = -2\sigma\upsilon\nu\omega$.

- β) $\epsilon\varphi(270^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$, $\epsilon\varphi(90^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$,
 $\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\varphi(540^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$, $\sigma\varphi(270^\circ + \omega) = -\epsilon\varphi\omega$, άρα
 $B = \frac{\sigma\varphi\omega(-\sigma\upsilon\nu\omega)(-\sigma\varphi\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega(-\sigma\varphi\omega)(-\epsilon\varphi\omega)} = \sigma\varphi^2\omega$.

- 15. α)** $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \omega\right)\right)$
 $= \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) = 1$.

- β) $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3} - \omega\right) = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)\right)$
 $= \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right) = 1$.

16. α) $A_f = \mathbb{R}$. **β)** Η συνάρτηση f έχει μέγιστο το 5 όταν

$$\text{συν} \frac{3x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}, \text{ ενώ έχει ελάχιστο το } -5$$

$$\text{όταν } \text{συν} \frac{3x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{4k\pi + 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

γ) $T = \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. **δ)** Η f είναι άρτια.

17. $\frac{2\pi}{\beta} = 3\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{3}$ και $\alpha = 3$.

18. α) $f(x) = \eta\mu\left(\frac{9x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$, **β)** $f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)$.

19. α) $f(x) = \text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$, **β)** $f(x) = -2\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}\right)$.

20. α) $2\text{συν}x - \sqrt{3} = 0$ ή $2\eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

β) Για $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, έχουμε:

$$\sqrt{3} + \epsilon\phi x = 0 \text{ ή } 1 + \sigma\phi x = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\sqrt{3} \text{ ή } \sigma\phi x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

γ) $\eta\mu x - 1 = 0$ ή $\text{συν}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 1$ ή $\text{συν}x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

δ) $\sqrt{3} - 2\eta\mu x = 0$ ή $1 - 2\text{συν}x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\text{συν}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ ή } x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

21. α) Θέτουμε $\omega = \eta\mu x$ και η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $2\omega^2 + \omega - 1 = 0$,

που έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $\omega = -1$ ή $\omega = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -1$ ή $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

β) Θέτουμε $\omega = \text{συν}x$ και η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $\omega^2 + 5\omega + 6 = 0$,

που έχει διακρίνουσα $\Delta = 1$ και ρίζες $\omega = -2$ ή $\omega = -3 \Leftrightarrow \text{συν}x = -2$ ή $\text{συν}x = -3$, που είναι αδύνατες.

γ) $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x$ ή $2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 3x, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } -x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \text{ ή } x = -2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

δ) $\text{συν}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \text{συν}(\pi - 4x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi + \pi - 4x$ ή $\frac{\pi}{2} - 2x = 2k\pi - \pi + 4x, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \text{ ή } -6x = 2k\pi - \pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = -\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

22. α) • Αν $\text{συν}x = 0$, τότε $\eta\mu x = \pm 1$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

• Αν $\sin x \neq 0$, η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) $3\eta\mu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \pm \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

23. α) $\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + x\right), \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) $\eta\mu^5 x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x(\eta\mu^4 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } \eta\mu x = \pm 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \text{ ή } x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

γ) $2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x - \sqrt{2}\eta\mu x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x(\eta\mu x + 1) - \sqrt{2}(\eta\mu x + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2\eta\mu x - \sqrt{2})(\eta\mu x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - \sqrt{2} = 0 \text{ ή } \eta\mu x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

δ) $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x - 1) - \eta\mu x(\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\eta\mu x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \text{ ή } \eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \text{ ή } \eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x \text{ ή } \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2\kappa\pi + x \text{ ή } \frac{\pi}{2} - x = 2\kappa\pi + \pi - x \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \text{ ή } 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} = 0 \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

24. α) $3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } 3x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{18} \text{ ή } x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{5\pi}{18}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

$$\text{Όμως } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \text{ οπότε } \frac{3\pi}{2} < \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{18} < \frac{5\pi}{2} \text{ ή } \frac{3\pi}{2} < \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} < \frac{5\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{26\pi}{18} < \frac{2\kappa\pi}{3} < \frac{44\pi}{18} \text{ ή } \frac{22\pi}{18} < \frac{2\kappa\pi}{3} < \frac{40\pi}{18}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{26}{12} < \kappa < \frac{44}{12} \text{ ή } \frac{22}{12} < \kappa < \frac{40}{12}, \kappa \in \mathbb{Z},$$

άρα $\kappa = 3$ ή ($\kappa = 2$ ή $\kappa = 3$) και κατά συνέπεια

$$x = 2\pi + \frac{\pi}{18} = \frac{37\pi}{18} \text{ ή } x = \frac{2 \cdot 2\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} = \frac{29\pi}{18} \text{ ή } x = 2\pi + \frac{5\pi}{18} = \frac{41\pi}{18}.$$

β) Για $2x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\epsilon\phi 2x = \epsilon\phi \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως $x \in (-2\pi, 2\pi)$, οπότε

$$-2\pi < \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} < 2\pi, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{19\pi}{8} < \frac{\kappa\pi}{2} < \frac{13\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{19}{4} < \kappa < \frac{13}{4}, \kappa \in \mathbb{Z},$$

άρα $\kappa = -4$ ή $\kappa = -3$ ή $\kappa = -2$ ή $\kappa = -1$ ή $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ ή $\kappa = 2$ ή $\kappa = 3$,

και κατά συνέπεια

$$x = -2\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{13\pi}{8} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = -\frac{9\pi}{8} \quad \text{ή} \quad x = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8} \quad \text{ή}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = -\frac{\pi}{8} \quad \text{ή} \quad x = 0 + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \quad \text{ή} \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8} \quad \text{ή} \quad x = \pi + \frac{3\pi}{8} = \frac{11\pi}{8} \quad \text{ή}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{8} = \frac{15\pi}{8}.$$