Ελευθέριος Πρωτοπαπάς

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Επιπλέον Συνδυαστικά θέματα για το βιβλίο
Μεθοδολογία Άλγεβρας Β΄ Γενικού Λυκείου (β΄ τόμος)
του Ε. Πρωτοπαπά, το οποίο κυκλοφορεί από τις Εκδόσεις Πατάκη.
Για να δείτε το βιβλίο, κάντε κλικ εδώ.

ΑΣΚΗΣΗ 21

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2x^3-5x^2-4x+\alpha$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0.

α) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0.

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(lnx) > 0.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\dfrac{(1-x)^2}{1-x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = ln5 + 2.

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(x) > –lnx.

δ) Να λύσετε την εξίσωση f(ημx) = –ln3.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}(\lambda-1)x-y=\lambda+1\\ x+(1-\lambda)y=1\end{cases}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και το πολυώνυμο $P(x)=14x^3-31x^2+6$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα δεν μπορεί να έχει άπειρες λύσεις.

β) Να βρείτε τις τιμές των $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $D_x\eta\mu t=D$ να είναι αδύνατη.

γ) Να κάνετε την διαίρεση P(x) : (2x – 1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

δ) Αν $\lambda\in\mathbb{Q}$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση με $x=\dfrac{14\lambda}{3}$, να λύσετε την ανίσωση

$\lambda^{2x}+\lambda^x-2\le 0$

ΑΣΚΗΣΗ 24

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=25^x-5^{x+1}+5$ και $g(x)=5^x$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία με εξίσωση y = –1.

β) Να βρείτε πότε η C_f είναι πάνω από τη C_g.

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(lnx) < 0.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Δίνεται το πολυώνυμο P με $P(x)=x^3+\alpha x^2-\beta x-6$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζα το –1 και η διαίρεσή του με το x – 1 δίνει υπόλοιπο –8.

α) Να αποδείξετε ότι α = 2, β = 5.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(e^x)=0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{P(x)}{x-2}\le 4x+7$.

δ) Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με την ευθεία με εξίσωση y = –6.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}(\lambda-2)x+4y=-1\\ 5x+(\lambda-1)y=1\end{cases}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Έστω ότι (x, y) = (α, β) είναι η λύση του συστήματος για λ = 3.

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ.

β) Να αποδείξετε ότι $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε ημφ = α και συνφ = β.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $\alpha e^{2x}-\beta e^{x}-2\geq 0$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $3\alpha\sigma\upsilon\nu t=3\beta+2\eta\mu^2 t$, $t\in(0,\pi)$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$ και

το πολυώνυμο Q με $Q(x)=2x^3-5x^2+12x-5$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $Q(x):(2x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)+f(x)=\ln(2ex)-\ln 5-1$.

δ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση y = 1.

ΑΣΚΗΣΗ 28

Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x)+3f(-x)=e^{-x}-e^{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x}-e^{-x}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή στο $\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\frac{e^2-1}{e}$.

ΑΣΚΗΣΗ 29

Δίνεται το γραμμικό 2x2 σύστημα με αγνώστους x, y, το οποίο έχει μοναδική λύση την (x, y) = (α, β) και για το οποίο ισχύει $D_x^2+D_y^2-2DD_x+4DD_y+5D^2=0$. Έστω επίσης η άρτια συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα στο (−∞, −3], γνησίως φθίνουσα στο [−3, 0] και η ακρότατη τιμή είναι το α.

α) Να λύσετε το σύστημα.

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο [0, +∞).

γ) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

δ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = −β και την ανίσωση f(x) < α.

ΑΣΚΗΣΗ 30

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\sqrt{-3\cdot 4^{-x}+2^{-x}+2}$, $g(x)=ημx$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με την ευθεία με εξίσωση $y=1$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=f(1)$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $g(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\leq 2f(2)$.

ΑΣΚΗΣΗ 21

α) $f(-1)=0 \Leftrightarrow 2(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+\alpha=0 \Leftrightarrow -2-5+4+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=3$.

β) $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-5x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2-7x+3)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1)(x-3)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ή $2x-1=0$ ή $x-3=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=3$.

γ) Για x > 0, θέτουμε w = lnx, οπότε η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$2w^3-5w^2-4w+3>0 \Leftrightarrow (w+1)(2w-1)(w-3)>0 \Leftrightarrow -1<w<\frac{1}{2}$ ή $w>3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1<\ln x<\frac{1}{2}$ ή $\ln x>3 \Leftrightarrow e^{-1}<x<e^{\frac{1}{2}}$ ή $x>e^3$.

ΑΣΚΗΣΗ 22

α) Πρέπει $\frac{(1-x)^2}{1-x^2}>0$ και $1-x^2\neq 0 \Leftrightarrow -1<x<1$, άρα $A_f=(-1,1)$.

β) Για $x\in(-1,1)$, έχουμε ότι

$f(x)=\ln 5+2 \Leftrightarrow \ln\frac{(1-x)^2}{1-x^2}=\ln 5+2 \Leftrightarrow \ln\frac{(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}=\ln 5+\ln e^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(5e^2) \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}=5e^2 \Leftrightarrow 1-x=5e^2+5e^2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5e^2x+x=1-5e^2 \Leftrightarrow x=\frac{1-5e^2}{1+5e^2}$, που είναι δεκτή.

γ) Για 0 < x < 1, έχουμε:

$f(x)>-\ln x \Leftrightarrow \ln\frac{1-x}{1+x}>\ln\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}>\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-x^2-1-x}{x(1+x)}>0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-1}{x(1+x)}>0 \Leftrightarrow x(x+1)<0 \Leftrightarrow -1<x<0$, που απορρίπτεται, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Για $x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$, έχουμε: $f(\eta\mu x)=-\ln 3 \Leftrightarrow \ln\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}=\ln 3^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3-3\eta\mu x=1+\eta\mu x \Leftrightarrow 4\eta\mu x=2 \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}$ ή $x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

α) Έχουμε ότι $D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2+1=-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda-2)$,

$D_x=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=1-\lambda^2+1=2-\lambda^2$ και

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda-1 & \lambda+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda-1-\lambda-1 = -2 \neq 0$.

- Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- Αν $\lambda = 0$ έχουμε $D = 0$, $D_x = 2 \neq 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda = 2$ έχουμε $D = 0$, $D_x = -2 \neq 0$, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση το σύστημα δεν έχει άπειρες λύσεις.

β) $D_x \eta\mu t = D \Leftrightarrow (2-\lambda^2)\eta\mu t = -\lambda(\lambda-2)$ **(Ι)**.

- $2-\lambda^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm\sqrt{2}$, τότε η (Ι) ισοδύναμα γίνεται:

  $\eta\mu t = \dfrac{-\lambda(\lambda-2)}{2-\lambda^2}$

  Για να είναι αδύνατη, θα πρέπει: $\eta\mu t < -1$ ή $\eta\mu t > 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \dfrac{-\lambda(\lambda-2)}{2-\lambda^2} < -1$ ή $\dfrac{-\lambda(\lambda-2)}{2-\lambda^2} > 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \dfrac{2\lambda-\lambda^2+2-\lambda^2}{2-\lambda^2} < 0$ ή $\dfrac{2\lambda-\lambda^2-2+\lambda^2}{2-\lambda^2} > 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \dfrac{-2\lambda^2+2\lambda+2}{2-\lambda^2} < 0$ ή $\dfrac{2(\lambda-1)}{2-\lambda^2} > 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \left(-\sqrt{2} < \lambda < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ή } \sqrt{2} < \lambda < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ή $\left(\lambda < -\sqrt{2} \text{ ή } 1 < \lambda < \sqrt{2}\right)$.

- Αν $\lambda = \pm\sqrt{2}$, η (Ι) γίνεται: $0 = -2 \pm 2\sqrt{2}$, που είναι αδύνατη.

γ) $P(x) = 14x^3 - 31x^2 + 6 = (2x-1)(7x^2-12x-6)$.

δ) Αφού $x = \dfrac{6\lambda}{7}$, για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$ έχουμε ότι:

$\dfrac{2-\lambda^2}{-\lambda(\lambda-2)} = \dfrac{14\lambda}{3} \Leftrightarrow 6-3\lambda^2 = -14\lambda^3 + 28\lambda^2 \Leftrightarrow 14\lambda^3 - 31\lambda^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$, αφού $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Τότε η ανίσωση που πρέπει να λύσουμε είναι η $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} - 2 \leq 0$ **(ΙΙ)**.

Θέτουμε $w = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ και η ανίσωση (ΙΙ) ισοδύναμα γίνεται:

$w^2 + w - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (αόριστη) και $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leq 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 24

α) $f(x) = -1 \Leftrightarrow 25^x - 5^{x+1} + 5 = -1 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 5\cdot 5^x + 6 = 0$ **(Ι)**.

Θέτουμε $w = 5^x$ και η (Ι) ισοδύναμα γίνεται:

$w^2 - 5w + 6 = 0 \Leftrightarrow w = 2$ ή $w = 3 \Leftrightarrow 5^x = 2$ ή $5^x = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x\ln 5=\ln 2$ ή $x\ln 5=\ln 3\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{\ln 2}{\ln 5}$ ή $x=\dfrac{\ln 3}{\ln 5}$.

Συνεπώς τα σημεία τομής είναι τα $\left(\dfrac{\ln 2}{\ln 5},-1\right)$, $\left(\dfrac{\ln 3}{\ln 5},-1\right)$.

β) $f(x)>g(x)\Leftrightarrow\ 25^x-5^{x+1}+5>5^x\ \Leftrightarrow\ (5^x)^2-6\cdot 5^x+5>0$ **(ΙΙ)**.

Θέτουμε $w=5^x$ και η (ΙΙ) ισοδύναμα γίνεται:

$w^2-6w+5>0\ \Leftrightarrow w<1$ ή $w>5\Leftrightarrow\ 5^x<1$ ή $5^x>5\ \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$.

γ) Για $x>0$ θέτουμε $w=5^{\ln x}$, οπότε:

$f(\ln x)<0\Leftrightarrow\left(5^{\ln x}\right)^2-5\left(5^{\ln x}\right)+5<0\ \Leftrightarrow\ w^2-5w+5<0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<w<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<5^{\ln x}<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \ln\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<\ln x\ln 5<\ln\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{\ln\frac{5-\sqrt{5}}{2}}{\ln 5}<\ln x<\dfrac{\ln\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{\ln 5}\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ e^{\frac{\ln\frac{5-\sqrt{5}}{2}}{\ln 5}}<x<e^{\frac{\ln\frac{5+\sqrt{5}}{2}}{\ln 5}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 25

α) Έχουμε ότι $P(-1)=(-1)^3+\alpha(-1)^2-\beta(-1)-6=-1+\alpha+\beta-6=\alpha+\beta-7$

και $P(1)=1^3+\alpha\cdot 1^2-\beta\cdot 1-6=1+\alpha-\beta-6=\alpha-\beta-5$.

Το -1 είναι ρίζα του $P(x)$, οπότε $P(-1)=0$, δηλαδή $\alpha+\beta-7=0$ **(Ι)**.

Η διαίρεσή του $P(x)$ με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -8, οπότε $P(1)=-8$, δηλαδή $\alpha-\beta-5=-8\Leftrightarrow\alpha-\beta=-3$ **(ΙΙ)**.

Λύνοντας το σύστημα των (Ι), (ΙΙ) έχουμε ότι:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=7\\ \alpha-\beta=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta+\alpha-\beta=7-3\\ \alpha-\beta-\alpha-\beta=-3-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha=4\\ -2\beta=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=5\end{cases}.$$

β) Για $\alpha=2$, $\beta=5$ έχουμε: $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$.

Θέτουμε $w=e^x$, οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

1	2	–5	–6	–1
	–1	–1	6	
1	1	–6	0	

$P(e^x)=0\Leftrightarrow\ P(w)=0\Leftrightarrow\ w^3+2w^2-5w-6=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (w+1)(w^2+w-6)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (w+1)(w-2)(w+3)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w+1=0$ ή $w-2=0$ ή $w+3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w=-1$ ή $w=2$ ή $w=-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x=-1$ (αδύνατη) ή $e^x=2$ ή $e^x=-3$ (αδύνατη) $\Leftrightarrow x=\ln 2$.

γ) Αφού -1, 2, -3 ρίζες του $P(x)$, ισχύει ότι $P(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$.

Τότε για $x\neq 2$, η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$\dfrac{(x+1)(x-2)(x+3)}{x-2}\leq 4x+7\ \Leftrightarrow\ (x+1)(x+3)\leq 4x+7\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x^2+4x+3-4x-7\leq 0\ \Leftrightarrow\ x^2-4\leq 0\ \Leftrightarrow\ x^2\leq 4\ \Leftrightarrow |x|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x<2$,

αφού $x\neq 2$.

δ) • Η C_f και η ευθεία με εξίσωση $y=-6$, τέμνονται αν

$f(x) = -6 \Leftrightarrow x(x^2+2x-5)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{24}}{2}=-1\pm\sqrt{6}$.

- Η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση y = –6,
  αν $f(x) > -6 \Leftrightarrow x(x^2+2x-5)>0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{6}<x<0$ ή $x>-1+\sqrt{6}$.
- Η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση y = –6,
  αν $f(x) < -6 \Leftrightarrow x(x^2+2x-5)<0 \Leftrightarrow x<-1-\sqrt{6}$ ή $0<x<-1+\sqrt{6}$.

ΑΣΚΗΣΗ 26

α) Έχουμε ότι: $D=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 4\\ 5 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)-20=\lambda^2-3\lambda-18=(\lambda+3)(\lambda-6)$,

$D_x=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda+1-4=-(\lambda+3)$ και

$D_y=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=\lambda-2+5=\lambda+3$.

- Για $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq -3$ και $\lambda\neq 6$ το σύστημα έχει μοναδική λύση που δίνεται από τις $(x,y)=\left(\dfrac{-(\lambda+3)}{(\lambda+3)(\lambda-6)},\dfrac{\lambda+3}{(\lambda+3)(\lambda-6)}\right)=\left(\dfrac{-1}{\lambda-6},\dfrac{1}{\lambda-6}\right)$.
- Για λ = –3, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=\left(\dfrac{1+4y}{5},y\right),\ y\in\mathbb{R}$.
- Για λ = 6, το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Από το (α) ερώτημα για λ = 3 το σύστημα έχει μοναδική λύση

$(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{-1}{3-6},\dfrac{1}{3-6}\right)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

γ) Έστω ότι υπάρχει τέτοια γωνία φ. Τότε θα ισχύει ότι $\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=1$.

Όμως:

$\eta\mu^2\varphi+\sigma\upsilon\nu^2\varphi=\alpha^2+\beta^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{9}\neq 1$, ΑΤΟΠΟ,

άρα δεν υπάρχει τέτοια γωνία φ.

δ) Η ανίσωση είναι η $\dfrac{1}{3}e^{2x}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)e^x-2\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}+e^x-6\geq 0$ **(Ι)**.

Θέτουμε $w=e^x$ στην (Ι) και έχουμε:

$w^2+w-6\geq 0 \Leftrightarrow (w+3)(w-2)\geq 0 \Leftrightarrow w\leq -3$ ή $w\geq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x\leq -3$ (αδύνατη) ή $e^x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq \ln 2$.

ε) Η εξίσωση είναι η

$3\left(\dfrac{1}{3}\right)\sigma\upsilon\nu t=3\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\eta\mu^2 t \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=-1+2\eta\mu^2 t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu t=-1+2\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 t\right) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 t+\sigma\upsilon\nu t-1=0$ **(ΙΙ)**.

Θέτουμε $\omega=\sigma\upsilon\nu t$ στην (ΙΙ) και έχουμε:

$2\omega^2+\omega-1=0 \Leftrightarrow \omega=-1 \text{ ή } \omega=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \text{συνt}=-1 \text{ ή } \text{συνt}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{συνt}=\text{συνπ} \text{ ή } \text{συνt}=\text{συν}\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow t=2\kappa\pi\pm\pi \text{ ή } t=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Τότε $t\in(0,\pi) \Leftrightarrow 0<t<\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<2\kappa\pi+\pi<\pi \text{ ή } 0<2\kappa\pi-\pi<\pi \text{ ή } 0<2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{3}<\pi \text{ ή } 0<2\kappa\pi-\dfrac{\pi}{3}<\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<\kappa<0 \text{ ή } \dfrac{1}{2}<\kappa<1 \text{ ή } -\dfrac{1}{6}<\kappa<\dfrac{1}{3} \text{ ή } \dfrac{1}{6}<\kappa<\dfrac{4}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ αδύνατη ή αδύνατη ή $\kappa=0$ ή αδύνατη,

άρα $t=\dfrac{\pi}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 27

α)

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -5x^2 & +12x & -5 & 2x-1 \\
-2x^3 & +x^2 & & & \\ \hline
 & -4x^2 & +12x & -5 & x^2-2x+5 \\
 & 4x^2 & -2x & & \\ \hline
 & & 10x & -5 & \\
 & & -10x & +5 & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

Συνεπώς: $Q(x)=2x^3-5x^2+12x-5=(2x-1)(x^2-2x+5)$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1}>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

Συνεπώς: $A_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση είναι η $\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+\ln\dfrac{x-1}{x+1}=\ln(2ex)-\ln 5-1$ και ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}>0 \\ x^2+1\neq 0 \\ \dfrac{x-1}{x+1}>0 \\ x+1\neq 0 \\ 2ex>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2\neq -1 \\ (x-1)(x+1)>0 \\ x\neq -1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1 \ \textbf{(I)}.$$

Για $x>1$ η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\dfrac{x-1}{x+1}\right)=\ln\dfrac{2ex}{5}-\ln e \Leftrightarrow \ln\dfrac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x^2+1)(x+1)}=\ln\dfrac{2ex}{5e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}=\ln\dfrac{2x}{5} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\dfrac{2x}{5} \Leftrightarrow 2x^3+2x=5x^2-10x+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^3-5x^2+12x-5=0 \Leftrightarrow Q(x)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-2x+5)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1=0$ ή $x^2-2x+5=0$ (αδύνατη, αφού $\Delta=-16<0$) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2}$, που απορρίπτεται λόγω του περιορισμού (Ι),

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Για $x\in A_f=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ **(ΙΙ)**, οι τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από την ευθεία με εξίσωση y = 1 είναι οι λύσεις της ανίσωσης

$f(x)>1 \Leftrightarrow \ln\frac{x-1}{x+1}>1 \Leftrightarrow \ln\frac{x-1}{x+1}>\ln e \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}>e \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}-e>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x-1-ex-e}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{(1-e)x-(1+e)}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{e+1}{1-e}<x<-1,$

όπου συναληθεύοντας με την (ΙΙ) προκύπτει: $\frac{e+1}{1-e}<x<-1.$

ΑΣΚΗΣΗ 28

α) Θέτουμε στη δοσμένη σχέση όπου x το –x και έχουμε: $2f(-x)+3f(x)=e^{x}-e^{-x}$**.**

Προκύπτει λοιπόν το σύστημα:

$$\begin{cases}2f(x)+3f(-x)=e^{-x}-e^{x}\\ 2f(-x)+3f(x)=e^{x}-e^{-x}\end{cases}\left|\begin{matrix}\cdot(-2)\\ \cdot 3\end{matrix}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}-4f(x)-6f(-x)=-2e^{-x}+2e^{x}\\ 6f(-x)+9f(x)=3e^{x}-3e^{-x}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4f(x)+9f(x)=-2e^{-x}+2e^{x}+3e^{x}-3e^{-x}\\ 6f(-x)+9f(x)=3e^{x}-3e^{-x}\end{cases},\ \text{άρα}\ \ f(x)=e^{x}-e^{-x}.$$

β) Για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ έχουμε ότι

- $e^{x_1}<e^{x_2}$ και
- $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}$,

οπότε $e^{x_1}-e^{-x_1}<e^{x_2}-e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x\in A_f=\mathbb{R}$, έχουμε ότι $-x\in A_f=\mathbb{R}$ και

$f(-x)=e^{-x}-e^{x}=-\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-f(x)$,

άρα η f είναι περιττή στο $\mathbb{R}$.

δ) Έχουμε ότι $f(1)=e-e^{-1}=e-\frac{1}{e}=\frac{e^2-1}{e}$, άρα η ανίσωση γράφεται:

$f(x)>\frac{e^2-1}{e} \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow x>1.$

ΑΣΚΗΣΗ 29

α) $D_x^2+D_y^2-2DD_x+4DD_y+5D^2=0 \Leftrightarrow \left(D_x-D\right)^2+\left(D_y+2D\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{D_x}{D}-1\right)^2+\left(\frac{D_y}{D}+2\right)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2+(\beta+2)^2=0 \Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(1,-2).$

β) Η f που είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 3] και γνησίως φθίνουσα στο [3, +∞).

γ) Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x = 3 ή x = –3 το f(3) = f(–3) = α = 1.

δ) Αφού η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1, η εξίσωση $f(x) = -\beta = 2$ είναι αδύνατη, ενώ η ανίσωση $f(x) < \alpha = 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\pm 3\}$.

ΑΣΚΗΣΗ 30

α) Πρέπει $-3\cdot 4^{-x} + 2^{-x} + 2 \geq 0$ **(Ι)**.

Θέτουμε $2^{-x} = w$, οπότε η (Ι) ισοδύναμα γίνεται:

$$-3w^2 + w + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq w \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2^{-x} \text{ (ισχύει) και } 2^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{-x} \leq 2^0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Συνεπώς $A_f = [0, +\infty)$.

β) Για $x \geq 0$, λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{-3\cdot 4^{-x} + 2^{-x} + 2} = 1 \Leftrightarrow -3\cdot 4^{-x} + 2^{-x} + 1 = 0 \ \textbf{(II)}.$$

Θέτουμε $2^{-x} = w$, οπότε η (ΙΙ) ισοδύναμα γίνεται:

$$-3w^2 + w + 1 = 0 \Leftrightarrow w = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{-6} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-x} = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \text{ ή } 2^{-x} = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \text{ (αδύνατη)} \Leftrightarrow \ln 2^{-x} = \ln\frac{1+\sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x\ln 2 = \ln\frac{1+\sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\ln\frac{1+\sqrt{13}}{6}}{-\ln 2}.$$

γ) $f(1) = \sqrt{-3\cdot 4^{-1} + 2^{-1} + 2} = \sqrt{-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$, όπου $f(1) > 1$,

οπότε η εξίσωση $g(x) = f(1) \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ είναι αδύνατη.

δ) $f(2) = \sqrt{-3\cdot 4^{-2} + 2^{-2} + 2} = \sqrt{-\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{33}{16}} = \frac{\sqrt{33}}{4}$,

οπότε η ανίσωση $g(x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq 2f(2) \Leftrightarrow \eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq 2\frac{\sqrt{33}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \frac{\sqrt{33}}{2}$ είναι αόριστη, αφού $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq \sqrt{2}$ και $\frac{\sqrt{33}}{2} > \sqrt{2}$.