

## ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

## ΘΕΜΑ 1

Α. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

α) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και  $\delta$  ισχύει η πρόταση:

$$\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma < \delta, \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$$

β) Για κάθε  $\theta \in (0, +\infty)$  ισχύει:  $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ .

γ) Η εξίσωση  $x^3 = 5$  έχει δύο πραγματικές ρίζες.

δ) Αν ισχύουν  $\alpha > 0$  και  $\Delta < 0$ , όπου  $\Delta$  η διακρίνουσα του τριωνύμου  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , τότε το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$ .

ε) Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[0, 4]$ .

$x$	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

Β. Να αποδείξετε ότι, για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$ ,  $\beta$  ισχύει η ανισότητα:  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ .

Πότε ισχύει η ισότητα;

## ΘΕΜΑ 2

Έστω  $\alpha$  ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει  $\alpha = |3\sqrt{2} - 4| + 2|\sqrt{2} - 2|$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha = \sqrt{2}$ . (Θεωρήστε ότι  $\sqrt{2} = 1,41$ )

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) να αποδείξετε ότι  $\alpha^3 = 2\alpha$ .

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης  $A = \alpha^3 + (\alpha - 1)^2$ .

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$  (1), με παράμετρο  $\beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις:  $x_1 = \beta - 2$  και  $x_2 = \beta + 2$ .

β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $x_1, \beta, x_2$ , με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες αντίστροφες των  $x_1$  και  $x_2$  είναι η  $(\beta^2 - 4)x^2 - 2\beta x + 1 = 0$ .

#### ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{9-x^2}{3-|x|}$ .

- α) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται η συνάρτηση  $f$ .
- β) Για τις τιμές του  $x$  που ορίζεται η συνάρτηση  $f$  να δείξετε ότι  $f(x) = 3 + |x|$ .
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  με τους άξονες.
- δ) Αν  $g(x) = 3 - x^2$  να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.