

7. ΘΕΜΑ_2_12763

Δίνεται μία πρόοδος (a_n) με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$.

- α) Να εξετάσετε αν η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.
β) Να αποδείξετε ότι η (a_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το n -οστό της όρο.

8. ΘΕΜΑ_2_12787

- α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.
β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό k ώστε οι αριθμοί $k-2, k, 2k+3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

9. ΘΕΜΑ_3_35037

Οι αριθμοί $k-2, 2k, 7k+4, k \in \mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (a_n) .

- α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.
β) i. Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του a_1 .
ii. Να αποδείξετε ότι: $a_2 + a_5 = 4(a_1 + a_4)$.

10. ΘΕΜΑ_3_35411

- α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .
β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .
γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

11. ΘΕΜΑ_4_37205

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε δυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

- α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά από το ατύχημα.
β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;
γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

12. ΘΕΜΑ_4_36677

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

- i. το ποσό a_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n – οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
 - ii. το ποσό b_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον n – οστό μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
 - iii. το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.
 - iv. το ποσό B_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.
- β) i. Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;
- ii. Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

13. ΘΕΜΑ_4_36649

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204.800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102.400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51.200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3.200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_n το πλήθος των βακτηρίων n ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($n \leq 5$).

- i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.
- ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_n των βακτηρίων συναρτήσει του n .
- iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

14. ΘΕΜΑ_4_34181

Δίνεται ορθογώνιο μήκους a , πλάτους β και εμβαδού E . Οι αριθμοί a , E , β , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E .

β) Αν $E=1$ και $\alpha+\beta=10$,

- i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες α και β .
- ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

15. ΘΕΜΑ_4_34180

Δίνονται οι αριθμοί 2, x, 8, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί 2, x, 8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;
- β) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι 2,x,8, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;
- γ) Αν (α_n) είναι η αριθμητική πρόοδος 2,5,8,11,... και (β_n) η γεωμετρική πρόοδος 2,4,8,16,..., τότε να βρείτε:
 - i. το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της (α_n) ,
 - ii. την τιμή του n, ώστε για το άθροισμα S_n του γι) ερωτήματος να ισχύει: $2 \cdot (S_n + 24) = \beta_7$.

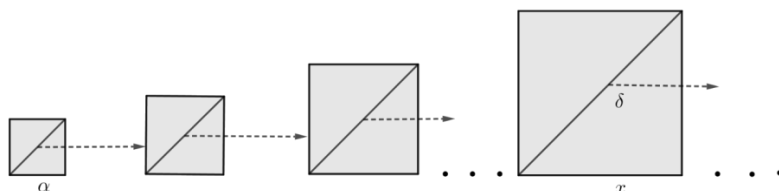
16. ΘΕΜΑ_4_33891

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_n) με λόγο λ για την οποία ισχύουν: $\alpha_3=4$, $\alpha_5=16$ και $\lambda > 0$.

- α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.
- β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_n) , με $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$, $n=1, 2, 3, \dots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_n) .
- γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_n) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_n) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$.

17. ΘΕΜΑ_4_14645

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς a , σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



- α) i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

- ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (a_n) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $a_n = a^2 \cdot 2^{n-1}$.

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με 8 τ.μ., να βρείτε:

- i. την πλευρά a του αρχικού τετραγώνου.
ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν 255 τ.μ.

18. ΘΕΜΑ_4_12998

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (a_n) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^7$.

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο n -οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

γ) Αν $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου

$$(a_n) \text{ είναι ίσο με } \frac{(\sqrt{3})^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}.$$

19. ΘΕΜΑ_4_12731

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa \cdot \lambda, (\kappa > 0, \lambda \neq 0 \text{ και } \lambda \neq 1)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, να βρείτε τους

αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}, \kappa, \kappa \cdot \lambda$.