

1. ΘΕΜΑ_2_14646

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$.

β) Αν $(\alpha + \beta)^2 = 4\alpha\beta$ να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

2. ΘΕΜΑ_2_14644

Για τους αριθμούς $2\alpha + 1$ και $\beta + 1$, ισχύει ότι $(2\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$, να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta + 2\alpha\beta = 0$,

β) οι αριθμοί $x = \alpha(2 + \beta)$ και $y = \beta(\alpha + 1)$ είναι αντίθετοι.

3. ΘΕΜΑ_2_13394

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$.

β) Αξιοποιώντας το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha\beta - 2)^6 + (\alpha\beta + 1)^2 = 5.$$

4. ΘΕΜΑ_4_14631

Έστω α, β, γ θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $\alpha + \gamma = 10$ και $(\beta - \gamma)\alpha = \alpha^2 - \beta\gamma$.

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

γ) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha - \beta + \gamma)(2\beta - \alpha + \gamma) = 100$.

5. ΘΕΜΑ_4_14462

Έστω α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 - 2(\alpha + \beta) = -2\alpha\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha + \beta)$

ii. $\alpha + \beta = 2$

β) Να αποδείξετε ότι $(2\alpha + \beta - 2)(\alpha + 2\beta - 2) = \alpha\beta$.

6. ΘΕΜΑ_4_14350

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 3x - 2y - 2$ και $\beta = y - 1 - 2x$ και η παράσταση $A = \frac{x^2 + 2x - xy - 2y}{3x + 6}$.

α) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

β) Αν οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι τότε:

i. να δείξετε ότι $x - y = 3$,

ii. να δείξετε ότι η παράσταση $A = 1$.