# Θέματα
# Πανελλήνιου Μαθητικού
# Διαγωνισμού στα Μαθηματικά
# «Ο Θαλής»

**2006 – 2025**

**Α΄ Λυκείου**

**Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (www.hms.gr)**

# Περιεχόμενα



Τα θέματα αντλούνται από την ιστοσελίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (www.hms.gr)

**ΘΕΜΑ 1ο**

Η Α΄ τάξη ενός Λυκείου έχει 5 τμήματα που το καθένα έχει τουλάχιστον 20 μαθητές. Σε καθένα από τους μαθητές των τμημάτων αυτών δίνουμε 10 €. Έτσι δώσαμε 1090€. Να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να λυθεί η εξίσωση $\lambda(\lambda x+3)=\lambda^3+2\lambda x-2$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda$.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Αν $\alpha, \beta, \gamma$ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 \geq 3\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}>\hat{B}$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}, \hat{B}$ τέμνονται στο $I$.

Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε τμήμα $B\Delta = B\Gamma - A\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι: $I\Delta = IA$.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Δύο παιδιά συζητούν για αλγεβρικά προβλήματα.

Ο Γιάννης λέει στη Μαρία: *Έχω σκεφτεί δύο ακέραιους αριθμούς x και y που είναι τέτοιοι ώστε, αν μειώσω τον x κατά 50 και αυξήσω τον y κατά 40, τότε το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται.*

Η Μαρία ρωτάει το Γιάννη: *Αν αυξήσεις τον αριθμό x κατά 100 και μειώσεις τον αριθμό y κατά 20, τότε πάλι το γινόμενό τους δεν μεταβάλλεται;*

Ο Γιάννης απαντάει: *Πράγματι, αυτό ισχύει.*

Η Μαρία καταλήγει: *Τότε γνωρίζω τους αριθμούς που σκέφθηκες.*

Έχει δίκιο η Μαρία; Εσείς μπορείτε να βρείτε τους αριθμούς που σκέφθηκε ο Γιάννης;

**ΘΕΜΑ 2ο**

Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(\beta-1)(\beta+1)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=45^{\circ}$. Φέρουμε ευθεία ε κάθετη προς την ΑΓ στο Α η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Ε. Πάνω στην ευθεία ε παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta=A\Gamma$ με το σημείο Α να βρίσκεται μεταξύ των Ε και Δ. Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς $A\Gamma=\beta$:

α) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,

β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6+2x^3y^2+3x^3+y^4+3y^2-40=0$$

**ΘΕΜΑ 1ο**

Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1.255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι, ώστε $0 \le x \le y \le z$ και

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 44$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων τα οποία έχουν την παρακάτω ιδιότητα:

*«υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο δύο ισοσκελή τρίγωνα»*

(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις).

**ΘΕΜΑ 4ο**

Αν οι πραγματικοί αριθμοί ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2\ ,\ \ y^2 - z = x^2\ ,\ \ z^2 - x = y^2$$

να αποδείξετε ότι:

α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$,

β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0 .

**ΘΕΜΑ 1ο**

Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75.
Να βρεθεί ο αριθμός αυτός.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Αν οι αριθμοί μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και ισχύει ότι

$$4^{\mu-2}+4^{\nu+2}\leq 2^{\mu+\nu+1}$$

να αποδείξετε ότι ο ακέραιος $A=2^{\mu}+2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 34.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ ύψος του.

α) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E=\Delta Z$ και $A\hat{\Delta}E=A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Αν υπάρχουν σημεία Ε και Ζ στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το μέρος του Α), αντίστοιχα, τέτοια ώστε να ισχύουν $\Delta E=\Delta Z$ και $A\hat{\Delta}E=A\hat{\Delta}Z$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Μία βρύση Α γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) μία δεξαμενή σε τρεις ώρες. Μία δεύτερη βρύση Β γεμίζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή σε τέσσερις ώρες. Μία τρίτη τέλος βρύση Γ αδειάζει (λειτουργώντας μόνη της) την ίδια δεξαμενή, όταν βέβαια είναι γεμάτη, σε έξι ώρες. Ένας αυτόματος μηχανισμός ανοίγει με τυχαία σειρά και τις τρεις βρύσες με τον εξής τρόπο: ανοίγει μία βρύση, μετά από δύο ώρες ανοίγει άλλη και τέλος μετά από μία ώρα ανοίγει και την άλλη βρύση. Ένας άλλος μηχανισμός μετρά το χρόνο που χρειάζεται να γεμίσει η δεξαμενή και ξεκινά τη λειτουργία του μόλις πέσει νερό μέσα στη δεξαμενή. Ποια είναι εκείνη η σειρά με την οποία, αν ανοίξει τις βρύσες ο μηχανισμός, ο αριθμός των ωρών που θα χρειαστούν για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι ακέραιος αριθμός; Ποιος είναι σε κάθε περίπτωση αυτός ο ακέραιος αριθμός;

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης;

$$x^2-2x=14,\quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Να λύσετε το σύστημα: $\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}$, $\frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}$ .

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με ΑΒΓ $AB=A\Gamma$ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ, Ν έτσι ώστε $EM=EN$ και $MB<M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα και τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)\left(x^2-7x+10\right)=0\\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2\left(1+x^3\right)+(1+x)^3}{3\left(x^2+1\right)}$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

α) Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{\kappa x}{2}+\dfrac{x}{4}=\kappa(x+2)-\dfrac{3(\kappa x-1)}{4}$ .

β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$. Κύκλος με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα $\rho<AB$ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες ΒΔ, ΓΕ τέμνουν για δεύτερη φορά τον κύκλο στα σημεία Κ, Ν αντίστοιχα. Αν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και S το σημείο τομής των ΔΝ, ΕΚ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, S και Τ βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$K(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+\left(\alpha\beta+\beta^2\right)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta} \quad \text{αν } \alpha+\beta\neq 0 \text{ και } \alpha+\beta\neq 1$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του $-5$ και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΒΓ=\alpha$ και $ΑΒ=ΑΓ=2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1)\ \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{και} \qquad (\Sigma_2)\ \begin{cases} \alpha x+\beta y=4 \\ 2\alpha x+3\beta y=-8 \end{cases}$$

έχουν την ίδια λύση $(x,y)$, να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z=2(x+y) \quad \text{και} \quad z=3(x-y)$$

α) Να αποδείξετε ότι: $y<x<z$.

β) Να βρείτε την τριάδα $(x,y,z)$ για την οποία: $x^2+y^2+z^2=680$.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=ΑΓ$ και $\hat{A}=20^{\circ}$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $ΑΔ=ΒΓ$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $ΑΕ \| ΒΓ$, $ΑΕ=ΑΒ$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ.

Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $B\hat{\Delta}Z$.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να βρείτε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\frac{2015^3+2013^3}{2014^2+4029^2}+\frac{2016^3+2012^3-18\cdot 2014}{2014^2+4027^2}-\frac{4\cdot 2014\cdot\left(2014^2+3\right)\left(5\cdot 2014^2+1\right)}{\left(5\cdot 2014^2+1\right)^2-\left(4\cdot 2014\right)^2}$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Ένα βιβλίο μαθηματικών κυκλοφορεί σε 2 τόμους A και B. 100 αντίτυπα του τόμου A και 120 αντίτυπα του τόμου B κοστίζουν συνολικά 4.000 ευρώ. Ένα βιβλιοπωλείο πούλησε 50 αντίτυπα του τόμου A με έκπτωση 10% και 60 αντίτυπα του τόμου B με έκπτωση 20% και εισέπραξε συνολικά 1.680 ευρώ. Να προσδιορίσετε την τιμή πώλησης του ενός βιβλίου από κάθε τόμο.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\left(x^2+y^2+xy\right)^2 \quad \text{και} \quad B=2\left[\left(x^2+y^2+2xy\right)^2+x^4+y^4\right]$$

όπου x, y είναι ρητοί.

α) Να γράψετε την παράσταση A ως πολυώνυμο των μεταβλητών x, y διατεταγμένο ως προς τις φθίνουσες δυνάμεις του $x$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{B}$ είναι ρητός, για οποιαδήποτε τιμή των ρητών αριθμών x, y.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Θεωρούμε τετράπλευρο ABCD με τη γωνία $\hat{A}=100^\circ$ και $\hat{D}=40^\circ$. Αν $DB$ είναι διχοτόμος της γωνίας $C\hat{D}A$ και $DB=DC$, να υπολογισθεί το μέτρο της γωνίας $C\hat{A}B$.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να λύσετε την ανίσωση: $2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4}$

και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y-1=6(x-3)(y+2) \\ \frac{3}{x-3}-\frac{4}{y+2}=11 \end{cases}$.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x+y+x^2+y^2=p$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=30^\circ$. Έστω Δ, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΕ και τετράγωνο ΑΖΗΘ. Η μεσοκάθετη του ΒΔ, τέμνει την ΑΓ στο σημείο Τ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΕΤ είναι ισόπλευρο,

β) τα τρίγωνα ΑΤΒ και ΔΘΤ είναι ίσα.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να βρείτε όλες τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$(x^2+x+1)(x-1)+5x \le x^3+x+19 \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (10)$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να βρεθεί θετικός ακέραιος

$$A=\overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1}\cdots\alpha_1\alpha_0}=\alpha_\nu\cdot 10^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot 10^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0 \ , \quad \nu\ge 2$$

ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε $MB=M\Gamma=MK$. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A=2017\cdot 2016\cdot 2015\cdot 2013\cdot 2012\cdot 2011$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να βρεθούν όλες οι τριάδες $(x,y,z)$ ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε:

$$x^2+4y^2+9z^2-4x-4y+12z+6=0$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Στην πλευρά ΒΓ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε σημείο Μ (διαφορετικό από το μέσο της ΒΓ) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Ο κύκλος $C_1$ (που έχει κέντρο το μέσο Κ του ΜΒ και ακτίνα ΚΒ) τέμνει την ΑΒ στο Δ. Ο κύκλος $C_2$ (που έχει κέντρο το μέσο Λ του ΜΓ και ακτίνα ΛΓ) τέμνει την ΑΓ στο Ε. Οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Π και Ρ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνονται στο σημείο Τ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΠΡΤ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους της πλευράς ΒΓ.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση

$$(x-1)(x^2-7x+10)=0$$

και την ανίσωση

$$\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$A=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{99} \quad \text{και} \quad B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ με $\hat{A}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο,

β) οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε $10(\alpha^2+\beta^2)=29\alpha\beta$ και $\alpha+\beta=7$.

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020},\ \frac{3020}{3021},\ \frac{3021}{3022},\ \frac{4019}{4020},\ \frac{4020}{4021},\ \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma=2\cdot \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{A}$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{AB}=\Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ είναι ίσα.

β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $A=\frac{(\alpha^2-1)^3}{(\alpha-1)^4}$ είναι ακέραιος.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός $A=81^{3^n}+4^{2n+1}$ είναι σύνθετος, για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό n.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020.
Να προσδιορίσετε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ με $\hat{A}=30^{\circ}$ και έστω Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΒΓ και ΑΓ, αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος $C_{A\Gamma M}$ του τριγώνου ΑΓΜ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο *Δ*. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο Ν προς την πλευρά ΑΒ και η κάθετη από σημείο Γ προς την ΔΝ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{A\Gamma M}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΔΝ.

Σημείωση: Σε ένα τρίγωνο ΧΥΖ, ο περιγεγραμμένος κύκλος του είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του Χ, Υ, Ζ. Αν Ο είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε $OX=OY=OZ$.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y) \end{array}\right\}$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να προσδιορίσετε όλους τους τριψήφιους ακέραιους

$$N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta,\ 0<\alpha<\beta$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha+(\alpha+1)+\ldots+\beta+(\beta+1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακέραιους από τον α μέχρι και τον $\beta+1$.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $B\hat{A}\Gamma=\Gamma\hat{A}\Delta$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $BE=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι $B\hat{E}\Gamma=\Gamma\hat{\Delta}A$.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να λύσετε τους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$ και $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=1$ .

**ΘΕΜΑ 2ο**

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Γ στο εσωτερικό του, έτσι ώστε ΑΓ >ΑΒ/2. Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ να είναι ισοσκελή με ΔΑ = ΔΓ > ΕΑ = ΕΒ και ΔΑ || ΕΓ . Η παράλληλη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΕΑ τέμνει την ευθεία ΕΓ στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΓΔ = ΕΖ και ΔΖ = ΒΕ

β) ΒΖ || ΔΓ.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω $n>2$ ένας περιττός ακέραιος. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n+2$ . Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, b, c έτσι, ώστε οι αριθμοί $\frac{\alpha}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{\alpha}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(\alpha+b+c)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

**ΘΕΜΑ 2ο**

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $y\neq -2$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^2-4x+\frac{5}{y+2}=2 \quad \text{και} \quad 3(x-2)^2-\frac{4}{y+2}=-1$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$A=2023\cdot 10^n+1$$

να ισούται με το τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Σε έναν κύκλο c(O,R) θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ τέτοια ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ || ΔΓ. Έστω Ε το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$ του τραπεζίου με τον κύκλο c(O,R). Αν η παράλληλη από το Ε στην ΔΓ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.

### ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο Α προς την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε, την πλευρά ΑΒ στο σημείο Η και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ.

Δίνεται ότι: $\mathrm{A\hat{Z}H} = \mathrm{Z\hat{A}H}$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΕ είναι ρόμβος.

### ΘΕΜΑ 2ο

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x,y) τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x^2+1)(y^2+1)+4(x-1)(y-1)+4(x+y-1)=0$$

### ΘΕΜΑ 3ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ τέτοιοι ώστε: $\dfrac{\beta}{\beta^2+\beta+1}=\alpha$.

α) Να εκφράσετε την παράσταση $\dfrac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}$ συναρτήσει του α.

β) Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του α ώστε $\dfrac{\beta^2}{\beta^4+\beta^2+1}=\alpha$.

**ΘΕΜΑ 1ο**

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους Α οι οποίοι είναι 2025 φορές μεγαλύτεροι από το τελευταίο ψηφίο τους.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ικανοποιούν την ισότητα:

$$4x^2+9y^2+x^2y^2+18xy-4x-6y+10=0$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=8x^3+27y^3$$

**ΘΕΜΑ 3ο**

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A}=120^o$ και $ΑΓ=2\cdot ΑΒ$.

Αν η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ, να βρεθεί ο λόγος $\frac{ΑΔ}{ΔΓ}$.