Θέματα
Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού στα Μαθηματικά «Ο Θαλής»

2006 – 2025

Β΄ Λυκείου

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (www.hms.gr)

Περιεχόμενα

Τα θέματα αντλούνται από την ιστοσελίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (www.hms.gr)

ΘΕΜΑ 1ο

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^2-(2006\kappa+1)x+2007=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$, έχει δύο ακέραιες ρίζες.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB=4$, $B\Gamma=2$ και σημείο Μ στο εσωτερικό του με $M\Gamma=1$ και $MB=\sqrt{3}$.

Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $\kappa=2+2^2+2^3+...+2^{2008}$. Να αποδείξετε ότι ο 30 διαιρεί τον κ.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}>\sqrt[3]{19}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $2^{-1}x+x^{-1}=\dfrac{\sqrt[3]{38}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$.

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$x^6+x^4-2x^3-2x^2y^2-2y^2+2y^4+2=0$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές των θετικών μονοψήφιων ακεραίων αριθμών κ, λ, μ, για τους οποίους η δευτεροβάθμια εξίσωση $\kappa x^2+\lambda x+\mu=0$ έχει δύο ακέραιες ίσες λύσεις.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ημιευθεία Αx || ΒΓ (η Αx βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο Γ ως προς την ευθεία ΑΒ). Στην ημιευθεία Αx θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΒΓΔΕ να είναι ρόμβος (το σημείο Ε βρίσκεται ανάμεσα στο Α και στο Δ). Στο σημείο Δ θεωρούμε την κάθετη ευθεία στη ΔΓ που τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο Ζ.

α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

β) Να αποδειχθεί ότι το Ε είναι έκκεντρο του τριγώνου ΑΓΖ.

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $x,y,z\in\mathbb{R}^*$, να λυθεί το σύστημα:

$$3x^2y+2yz^2=70xz$$

$$7y^2z+4zx^2=256xy$$

$$5z^2x+6xy^2=52yz$$

ΘΕΜΑ 1ο

Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί, με ψηφία περισσότερα από δύο, έχουν ως τελευταίο διψήφιο τμήμα τους τον αριθμό 15. Να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι πολλαπλάσιο του 25.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΔ || ΒΓ και $\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=90^{\circ}$. Φέρουμε από το Α κάθετη προς τη ΒΓ που την τέμνει στο σημείο Ε και από το Ε κάθετη προς τη διαγώνιο ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ζ. Να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{A}\hat{\mathrm{Z}}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 3ο

Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακέραιων (x,y,z) με, $x\geq y\geq z$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2$$
$$x+y+z=300$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από το Μ προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$\mathrm{A\Gamma}\perp\mathrm{AM} \quad \text{και} \quad \mathrm{A\Gamma}=\mathrm{AM}, \quad \mathrm{B\Delta}\perp\mathrm{MB} \quad \text{και} \quad \mathrm{B\Delta}=\mathrm{MB}$$

και επιπλέον τα σημεία Γ, Μ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} \leq \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O,R). Αν A_1, B_1, Γ_1 είναι τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, και A_2, B_2, Γ_2 είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το εξάγωνο $A_2B_1\Gamma_2A_1B_2\Gamma_1$ έχει τις πλευρές του ίσες και ότι οι διαγώνιές του A_1A_2, B_1B_2 και $\Gamma_1\Gamma_2$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y με $x \geq 2009$ και $y \geq -2009$ ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-2009}+\sqrt{y+2009}=\frac{x+y}{2}+1$$

να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A=\dfrac{x-y+2}{2}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{cases}(x+y)^3=z-2x-y\\(y+z)^3=x-2y-z\\(z+x)^3=y-2z-x\end{cases}\right\}\quad(\Sigma)$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 1ο

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14\,,\quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4$$

ΘΕΜΑ 3ο

Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\,,\quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους ΑΔ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία Μ, Ν έτσι ώστε ΕΜ = ΕΝ και ΜΒ < ΜΓ.

Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΓ και ΝΒ τέμνονται πάνω στο ύψος ΑΔ.

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K(x)=\frac{(x+2)(2x-1)(x-1)+x-4}{x^2-2}\ ,\quad x\neq\pm\sqrt{2}$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\frac{2012\cdot 4019\cdot 2009+2006}{2010^2-2}$$

χωρίς την εκτέλεση των σημειούμενων πράξεων.

ΘΕΜΑ 2ο

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c^2}$$

με άγνωστό x, έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$, για όλες τις τιμές των παραμέτρων $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$.

ΘΕΜΑ 3ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$y=x^3+2x-2,\ \ z=y^3+2y-2,\ \ x=z^3+2z-2$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν τον κύκλο c(O,R) στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα. Από το σημείο Ζ, θεωρούμε παράλληλη στην ΑΓ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Μ. Από το σημείο Ε, θεωρούμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα ΒΜΟΖ και ΓΝΟΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Το δεύτερο κοινό σημείο, έστω Κ, των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στον κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔΙ, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $\alpha \neq 0$ και $-1<\alpha<1$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης:

$$K=\frac{A}{B}-1+\alpha$$

όπου

$$A=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}, \quad B=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\kappa x-1+\kappa^2=0$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες στο διάστημα (0,5) με άθροισμα τέταρτων δυνάμεων ίσο με 82.

ΘΕΜΑ 3ο

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς ακέραιους x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι:

$$\frac{x}{2012x+3}=\frac{y}{2012y+5}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z είναι διαιρέτης του 747.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος c(O,R), τυχούσα χορδή του AB (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου AB. Οι κύκλου $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνουν τον κύκλο c(O,R) στα σημεία K και N, αντίστοιχα. Οι κύκλοι $c_1(A,AM)$ και $c_2(B,BM)$ τέμνονται στο σημείο T. Να αποδείξετε ότι το σημείο T είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου KMN.

ΘΕΜΑ 1ο

Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2+3x+1}{x}-\frac{27x}{9x^2+3x+1}\geq 6$$

Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

ΘΕΜΑ 2ο

Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=\beta$.

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρείτε όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες η αριθμητική τιμή του κλάσματος

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2-x+2}$$

είναι θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O,R) (με κέντρο O και ακτίνα R). O κύκλος C_B(B,AB) (με κέντρο Β και ακτίνα ΑΒ), τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και τον κύκλο C(O,R) στο σημείο Λ. Ο κύκλος C_Γ(Γ,ΑΓ) (με κέντρο Γ και ακτίνα ΑΓ), τέμνει την ΑΒ στο σημείο Μ και τον κύκλο C(O,R) στο σημείο Ν. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζουν τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω k ένας ακέραιος και x ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A=\frac{x^k+1}{x^{k+1}+1} \quad \text{και} \quad B=\frac{x^{k+1}+1}{x^{k+2}+1}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x,y) που είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$2x^2-10xy+13y^2+2|x-y|=5$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με AB < AC < BC) εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) (με κέντρο O και ακτίνα R) και έστω D, E τα αντιδιαμετρικά σημεία των B, C, αντίστοιχα (ως προς τον κύκλο (c)). O κύκλος (c_1) (με κέντρο A και ακτίνα AE), τέμνει την AC στο σημείο K. O κύκλος (c_2) (με κέντρο A και ακτίνα AD), τέμνει την προέκταση της AB (προς το μέρος του A) στο σημείο L. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες EK και DL τέμνονται επάνω στον κύκλο (c).

ΘΕΜΑ 4ο

Σε έναν διαγωνισμό που η μέγιστη δυνατή βαθμολογία ήταν 100 έλαβαν μέρος x μαθητές. Οκτώ μαθητές πήραν βαθμό 100, ενώ όλοι οι υπόλοιποι πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 70. Αν ο μέσος όρος των βαθμών των μαθητών ήταν 78, να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του πλήθους των μαθητών.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $x^2+2y^2=4$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{x^4+5x^2+2y^2}+\sqrt{x^4+32y^2}$$

είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x, y.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Κ στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Ν των ΑΚ, ΒΚ αντίστοιχα, και έστω ότι οι ευθείες ΓΝ, ΔΜ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΡΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΓΔ.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ότι ο αριθμός a είναι θετικός ακέραιος.

α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5a}{2}, \frac{a+2}{2}, a$.

β) Να βρείτε το υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3}\ ,\quad 2(3x-a)+x>2(x+1)-a\ ,\quad a-x\le 2(x-a)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο A.

ΘΕΜΑ 4ο

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma:\ \begin{cases} a\sqrt[3]{b}-c=a \\ b\sqrt[3]{c}-a=b \\ c\sqrt[3]{a}-b=c \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 1ο

Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$A=\left(\alpha^2+18\right)^2-\left(8\alpha+1\right)^2$$

είναι πρώτος.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB=A\Gamma)$ και σημείο Δ στη διάμεσό του ΑΜ τέτοιο, ώστε

$$MB=M\Gamma=M\Delta$$

Με βάση την ΑΔ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΔΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΖ, να αποδείξετε ότι η ΜΚ είναι παράλληλη στη ΔΖ.

ΘΕΜΑ 3ο

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+5)(2\alpha+7)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}>16\sqrt{\frac{\alpha+4}{\alpha}}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Να βρεθούν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left\{x+\frac{1}{x}-w=2,\ y+\frac{1}{y}-w=2,\ z+\frac{1}{x}+w=2,\ y+\frac{1}{z}+w=2\right\}$$

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ο αριθμός ρ είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι λύση της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 45^o$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

ΘΕΜΑ 3ο

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός $A = \dfrac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$ είναι σύνθετος.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

ΘΕΜΑ 1ο

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6-27\beta^6}=-1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x+y+z+w=8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$A=x^2+y^2+z^2+w^2$$

ΘΕΜΑ 3ο

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $A=\overline{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}=\alpha_3\cdot 10^3+\alpha_2\cdot 10^2+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε

$$\alpha_0>\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3>0$$

να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9\cdot A$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Η παράλληλη από το Ο προς την ΑΓ τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1) του τριγώνου ΑΔΟ τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε και τον κύκλο c(O,R) στο σημείο Ζ. Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τον κύκλο c(O,R) στο Η. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΓΕ είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΟΖΕ και ΟΓΕ είναι ίσα.

γ) Τα σημεία Γ, Ο, Η είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 1ο

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha^3+\beta^3=90\alpha\beta$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha+\beta$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{array}{c} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{array}\right\}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}-\{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda-3)x^2+(\lambda^2+1)x-(11\lambda-18)=0$$

είναι μήκη των δύο κάθετων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω Σ(ν) το άθροισμα των ψηφίων του θετικού ακέραιου ν. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους ν που ικανοποιούν την ισότητα: Σ(ν) = 2025 – ν .

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{A} = 45^o$. Θεωρούμε το ύψος ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ, του οποίου η προέκταση τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του, έστω $C_{ΑΒΓ}$, στο σημείο Δ. Η προέκταση του ύψους ΒΕ τέμνει επίσης στο σημείο Λ την εφαπτόμενη του κύκλου $C_{ΑΒΓ}$ στο σημείο του Γ. Η ΑΛ τέμνει τον κύκλο $C_{ΑΒΓ}$ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΓΛ και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΖΓΛ .

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + c$, όπου α, b, ψ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε b > 2α.

Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\alpha + b + c}{b - 2\alpha}$$

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρεθούν οι τριάδες (x,y,z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$N = \overline{\alpha\beta\gamma\delta} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta\,, \quad 0 < \alpha < \gamma$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha-1)^2 + \alpha^2 + \ldots + \gamma^2 + (\gamma+1)^2$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha - 1$ μέχρι και τον $\gamma + 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ > ΒΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοια ώστε ΓΔ = ΓΒ .

Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι

$$\text{ΑΓ} = 3 \cdot \text{ΒΓ}$$

ΘΕΜΑ 1ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\neq 0,\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{1}{9},\ xyz=27\right\}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$2(x-1)(y-1)-2(x-1)\sqrt{y-1}-2(y-1)\sqrt{x-1}+x+y-2\leq 0$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\hat{\Delta}B=70^{\circ}$ και $A\hat{\Delta}\Gamma=80^{\circ}$.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Delta$.

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, b, c, d έτσι, ώστε οι αριθμοί $\frac{\alpha}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{\alpha}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(\alpha+b+c+d)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$A=2023\cdot 10^{n}+6$$

ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα τριώνυμα $P(x)=x^2+\alpha x+\beta$ και $Q(x)=x^2+\gamma x+\delta$, με α, β, γ, δ ακέραιους, ώστε να ισχύει

$$P(1)=Q(2022) \quad \text{και} \quad P(2022)=Q(1)$$

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $\alpha+\gamma$ και η διαφορά $\beta-\delta$ είναι πολλαπλάσια του 2023.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και το σημείο τομής των διχοτόμων του Ι. Έστω ότι η ευθεία ΑΙ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ. Θεωρούμε σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΚ = ΒΔ, και σημείο Λ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΛ = ΑΚ. Αν Μ είναι το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΚΙΛ με την ΑΛ (διαφορετικό από το Λ), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ είναι κάθετη στην ΒΓ.

ΘΕΜΑ 1ο

Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του x, αν ισχύουν οι ισότητες:

$$x=\frac{\delta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma+\delta}=\frac{\beta}{\gamma+\delta+\alpha}=\frac{\gamma}{\delta+\alpha+\beta}$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του 0.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=36^\circ$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma\Delta=AB$. Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε $\Delta E=A\Delta$ και τα σημεία Α και Ε να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΒΓ. Αν η ευθεία ΒΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΖ είναι κάθετη προς την πλευρά ΑΒ.

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρείτε την αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των παραμέτρων $\alpha,b\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, έτσι ώστε να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x, y που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\alpha \quad \text{και} \quad \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=b$$

ΘΕΜΑ 1ο

Αν οι α, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η εξίσωση

$$3x^2 - 2(2\alpha + b)x + 2\alpha^2 + 2\alpha b + b^2 - 1 = 0$$

με άγνωστο το x, έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς, να αποδείξετε ότι:

$$(1)\quad \alpha^2 + \alpha b + b^2 \le \frac{3}{2} \qquad \text{και} \qquad (2)\quad \alpha + b \le \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ < ΒΓ, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε τα τρίγωνα ΒΑΕ και ΒΓΖ να έχουν το ίδιο εμβαδό.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $AB^2 = AE \cdot A\Delta$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 3ο

Ο Γιώργος μοίρασε διαδοχικά 150 μπίλιες σε 10 κουτιά K_1, K_2, … , K_{10}, με αυτή τη σειρά, στα οποία έβαλε α_1, α_2, … , α_{10} μπίλιες, αντίστοιχα, όπου α_1, α_2, … , α_{10} θετικοί ακέραιοι. Ξεκινώντας να βάζει μπίλιες από το κουτί K_1, σε κάθε επόμενο κουτί έβαζε περισσότερες μπίλιες από το προηγούμενο. Αν ο αριθμός από μπίλιες που έβαλε στο πρώτο κουτί είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μισό του αριθμού από μπίλιες που έβαλε στο δέκατο κουτί, να βρεθεί πόσες μπίλιες έβαλε στο έκτο κουτί.