

ΘΕΜΑ Α

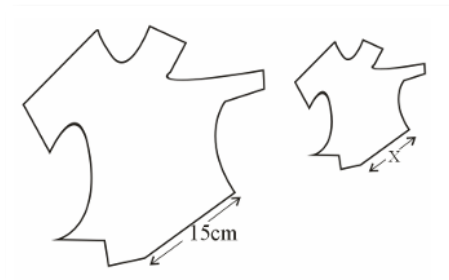
1. Να υπολογίσετε το εξαγόμενο $\sqrt{1+\sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9}$.
2. Αν $x = -\frac{1}{2}$ και $y = -\frac{3}{2}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$.

Απάντηση

1. $\sqrt{1+\sqrt{9}} - 1 - \sqrt{9} = \sqrt{1+3} - 1 - 3 = \sqrt{4} - 4 = 2 - 4 = -2$.
2. $x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right]^2 = \left(\frac{1^2}{2^2} - \frac{3^2}{2^2} \right)^2 = \left(\frac{1-9}{4} \right)^2 = \left(-\frac{8}{4} \right)^2 = (-2)^2 = 4$.

ΘΕΜΑ Β

1. Στα δύο παρακάτω σχήματα το μικρό είναι σμίκρυνση του μεγάλου με κλίμακα 1 : 3.

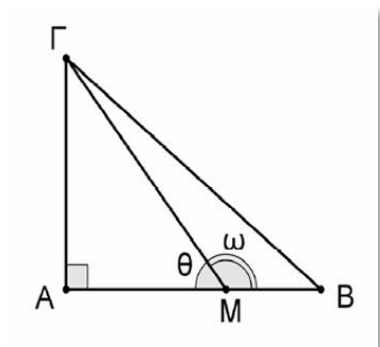


Να υπολογίσετε το μήκος X της πλευράς του μικρού σχήματος.

2. Το τρίγωνο ABΓ του σχήματος είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές AB=5 cm και AΓ=4 cm.

Αν MB = 2 cm να βρείτε:

- α) την εφθ
- β) την εφω



Απάντηση

1. Αφού η κλίμακα είναι 1 : 3 τότε το μήκος X είναι το $\frac{1}{3}$ του μήκους 15 cm.

Άρα, $X = 15 : 3 = 5$ cm .

2. α) $AM = AB - MB = 5 - 2 = 3$ cm .

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A\Gamma}{AM} = \frac{4}{3}.$$

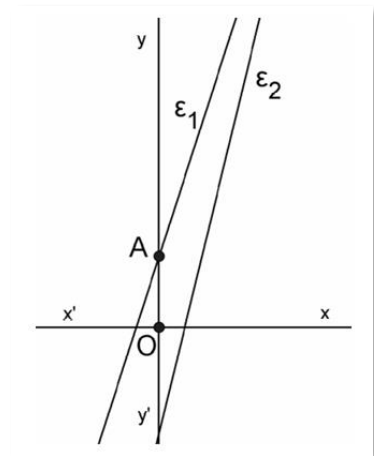
β) Οι γωνίες ω και θ είναι παραπληρωματικές, άρα $\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi\theta = -\frac{4}{3}$.

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το O και δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) με εξισώσεις

$$(\varepsilon_1): y = 3x + 2 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y = 4x - 3$$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .
 β) Να εξετάσετε αν κάποια από τις δύο ευθείες διέρχεται από το σημείο $M(2,5)$.
 γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .



Απάντηση

- α) Το σημείο A που η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 3x + 2$ τέμνει τον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη

$$y = 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

Άρα, $A(0,2)$.

- β) Για $x = 2$, από την $(\varepsilon_1): y = 3x + 2$ προκύπτει $y = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8 \neq 5$, άρα η (ε_1) δε διέρχεται από το M .

Για $x = 2$, από την $(\varepsilon_2): y = 4x - 3$ προκύπτει $y = 4 \cdot 2 - 3 = 8 - 3 = 5$, άρα η (ε_2) διέρχεται από το M .

- γ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι η λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$$

Τα πρώτα μέλη είναι ίσα, άρα και τα δεύτερα, οπότε ισχύει

$$3x + 2 = 4x - 3 \quad \text{ή} \quad 2 + 3 = 4x - 3x \quad \text{ή} \quad 5 = x$$

Για $x = 5$, από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι: $y = 3 \cdot 5 + 2 = 15 + 2 = 17$.

Άρα, το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το $(5,17)$.

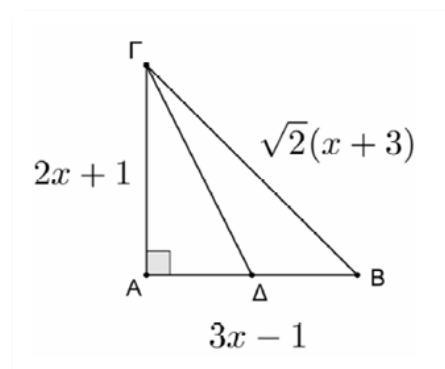
ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, τα μήκη των πλευρών του σε cm είναι:

$$AB = 3x - 1, \quad A\Gamma = 2x + 1 \quad \text{και} \quad B\Gamma = \sqrt{2}(x + 3),$$

όπου x είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- α) Να αποδείξετε ότι για τον αριθμό x ισχύει $11x^2 - 14x - 16 = 0$.
 β) Να βρείτε τα μήκη των AB και $A\Gamma$.
 γ) Αν Δ είναι το μέσο της AB , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma\Delta$.



Απάντηση

α) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \text{ ή } \left(\sqrt{2}(x+3)\right)^2 = (2x+1)^2 + (3x-1)^2 \text{ ή } \sqrt{2}^2 (x+3)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$2(x^2 + 6x + 9) = 13x^2 - 2x + 2 \text{ ή } 2x^2 + 12x + 18 = 13x^2 - 2x + 2 \text{ ή } 0 = 11x^2 - 14x - 16$$

β) Επειδή τα μήκη των ΑΒ και ΑΓ είναι συναρτήσεις του x, υπολογίζουμε αρχικά το x λύνοντας την εξίσωση $11x^2 - 14x - 16 = 0$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-16) = 196 + 704 = 900.$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 11} = \frac{14 \pm 30}{22} = \begin{cases} x_1 = \frac{14+30}{22} = \frac{44}{22} = 2 \\ x_2 = \frac{14-30}{22} = \frac{-16}{22} = -\frac{8}{11} \end{cases}.$$

Για $x_1 = 2$ έχουμε $ΑΓ = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ cm}$ και $ΑΒ = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ cm}$.

Για $x_2 = -\frac{8}{11}$ έχουμε $ΑΓ = 2 \cdot \left(-\frac{8}{11}\right) + 1 = -\frac{16}{11} + \frac{11}{11} = -\frac{5}{11}$ (απορρίπτεται διότι το μήκος είναι θετικός αριθμός).

γ) $ΑΔ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ cm}.$

$$(ΒΓΔ) = (ΑΒΓ) - (ΑΓΔ) = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{2} - \frac{ΑΔ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{2,5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} - \frac{12,5}{2} = \frac{12,5}{2} = 6,25 \text{ cm}^2.$$