

ΘΕΜΑ Α

1. Οι αριθμοί 3, 9, 27, 81, 243 είναι όλοι της μορφής
α) $3^v - 3$ β) $3 \cdot 3^v$ γ) 3^v δ) $3^v + 3$
με v θετικό ακέραιο.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$, όταν $x = 1 - \sqrt{5}$ και $y = 2 + \sqrt{5}$.
3. Υπάρχει πραγματικός αριθμός που να ικανοποιεί τη σχέση $x^2 + 25 = 0$;
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση

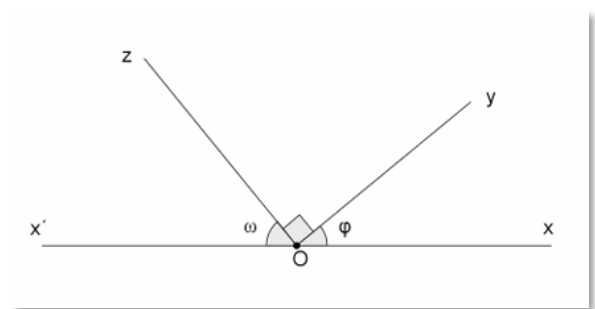
1. Σωστό είναι το (γ) διότι επαληθεύει και τους πέντε αριθμούς για $v = 1, 2, 3, 4, 5$ αντίστοιχα.
2. $K = \frac{x^2 - y^2}{x + y} = \frac{(x - y)(x + y)}{x + y} = x - y = (1 - \sqrt{5}) - (2 + \sqrt{5}) = 1 - \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -1 - 2\sqrt{5}$.
3. Η εξίσωση γίνεται $x^2 = -25$ και είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς διότι το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού x είναι μη αρνητικός αριθμός.

ΘΕΜΑ Β

1. Στο διπλανό σχήμα η γωνία $\hat{x'Ox}$ είναι ευθεία και η γωνία $\hat{yOz}$ είναι ορθή.

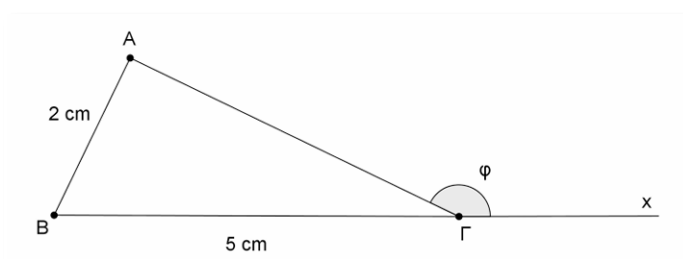
Αν $\frac{\varphi}{\omega} = 0,8$, τότε

- α) $\varphi = 30^\circ$ β) $\varphi = 60^\circ$
γ) $\varphi = 50^\circ$ δ) $\varphi = 40^\circ$



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με $AB = 2 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 5 \text{ cm}$, όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



A. Αν $\hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}$, να βρεθεί η πλευρά ΑΓ του τριγώνου.

B. Αν Γχ είναι προέκταση της πλευράς ΒΓ και $\varphi = \chi\hat{\Gamma}A$, να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας φ .

Απάντηση

1. Ισχύει ότι $\frac{\varphi}{\omega} = 0,8$ ή $\varphi = 0,8\omega$.

Επιπλέον, οι τρεις διαδοχικές γωνίες, η φ , η ορθή και η ω σχηματίζουν την ευθεία γωνία, άρα έχουν άθροισμα ίσο με 180° , οπότε ισχύει ότι:

$$\varphi + 90 + \omega = 180 \text{ ή } 0,8\omega + 90 + \omega = 180 \text{ ή } 0,8\omega + \omega = 180 - 90 \text{ ή } 1,8\omega = 90 \text{ ή } \omega = \frac{90}{1,8} \text{ ή } \omega = 50^\circ$$

Άρα, $\varphi = 0,8\omega = 0,8 \cdot 50^\circ = 40^\circ$.

2. A. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ ή } \hat{A} + \hat{A} = 180^\circ \text{ ή } 2\hat{A} = 180^\circ \text{ ή } \hat{A} = \frac{180^\circ}{2} \text{ ή } \hat{A} = 90^\circ$$

Άρα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη ΒΓ, οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Gamma^2 \text{ ή } 5^2 = 2^2 + A\Gamma^2 \text{ ή } 25 = 4 + A\Gamma^2 \text{ ή } A\Gamma^2 = 25 - 4 \text{ ή } A\Gamma^2 = 21 \text{ ή } A\Gamma = \sqrt{21}$$

B. $\eta\mu\varphi = \eta\mu(180 - \hat{\Gamma}) = \eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{2}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu(180 - \hat{\Gamma}) = -\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = -\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

ΘΕΜΑ Γ

Μαθητές από την Γ' τάξη ενός Γυμνασίου θα διανυκτερεύσουν σε ξενώνα Περιβαλλοντικής Εκπαίδευσης. Αν οι μαθητές κοιμηθούν ανά δύο στα δωμάτια αυτού του ξενώνα, τότε ένας μαθητής δεν θα έχει δωμάτιο για να κοιμηθεί. Όμως, εάν οι μαθητές κοιμηθούν ανά τρεις στα δωμάτια, τότε δεν θα χρησιμοποιηθούν τέσσερα από τα δωμάτια του ξενώνα. Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών και το πλήθος των δωματίων του ξενώνα.

Απάντηση

Έστω x ο αριθμός των μαθητών και y το πλήθος των δωματίων.

Όταν οι μαθητές κοιμούνται ανά δύο, τότε ένας μένει χωρίς δωμάτιο, οπότε ισχύει $x = 2y + 1$.

Όταν οι μαθητές κοιμούνται ανά τρεις, τότε περισσεύουν τέσσερα δωμάτια, οπότε ισχύει $x = 3(y - 4)$.

Επομένως, ισχύει ότι: $2y + 1 = 3(y - 4)$ ή $2y + 1 = 3y - 12$ ή $1 + 12 = 3y - 2y$ ή $13 = y$.

Άρα, τα δωμάτια είναι 13 και οι μαθητές $x = 2y + 1 = 2 \cdot 13 + 1 = 26 + 1 = 27$.

ΘΕΜΑ Δ

Να υπολογίσετε το ποσοστό (%) κατά το οποίο αυξάνεται το εμβαδόν ενός τετραγώνου, όταν η πλευρά του αυξηθεί κατά 20%.

Απάντηση

Αν x είναι η πλευρά του τετραγώνου και αυξηθεί κατά 20% θα γίνει $x + \frac{20}{100} \cdot x = x + 0,2x = 1,2x$.

Επομένως, το εμβαδόν του, που αρχικά είναι ίσο με x^2 , θα γίνει $(1,2x)^2 = 1,44x^2$, δηλαδή θα αυξηθεί κατά

$$\frac{1,44x^2 - x^2}{x^2} = \frac{0,44x^2}{x^2} = 0,44 = 44\%$$