

Κλειστού τύπου

1. Ο σύλλογος των καθηγητών ενός σχολείου αποτελείται από 12 γυναίκες και 8 άνδρες. Ο μέσος όρος της ηλικίας των γυναικών είναι 40 χρόνια, ενώ ο μέσος όρος της ηλικίας των ανδρών είναι 35 χρόνια. Ο μέσος όρος της ηλικίας όλων των καθηγητών του σχολείου είναι:

A. 37 χρόνια B. 37,5 χρόνια **Γ. 38 χρόνια** Δ. 38,5 χρόνια E. 39 χρόνια

Απάντηση

Ο μέσος όρος της ηλικίας των 12 γυναικών είναι 40, άρα το άθροισμα των ηλικιών τους είναι ίσο με

$$12 \cdot 40 = 480$$

Ο μέσος όρος της ηλικίας των 8 ανδρών είναι 35, άρα το άθροισμα των ηλικιών τους είναι ίσο με

$$8 \cdot 35 = 280$$

Άρα, ο μέσος όρος των $12 + 8 = 20$ είναι ίσος με $\frac{480 + 280}{20} = \frac{760}{20} = 38$ χρόνια.

2. Η τιμή της παράστασης $\Pi = 2^{100} \cdot 5^{101} + 10^{100} - 2^{102} \cdot 5^{100}$ είναι

A. 10^{101} B. 10^{100} Γ. -10^{100} **Δ. $2 \cdot 10^{100}$** E. $-2 \cdot 10^{100}$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \Pi &= 2^{100} \cdot 5^{101} + 10^{100} - 2^{102} \cdot 5^{100} = 2^{100} \cdot 5^{100} \cdot 5 + 10^{100} - 2^2 \cdot 2^{100} \cdot 5^{100} = \\ &= (2 \cdot 5)^{100} \cdot 5 - 10^{100} - 4 \cdot (2 \cdot 5)^{100} = 10^{100} \cdot 5 + 10^{100} - 4 \cdot 10^{100} = (5 + 1 - 4) \cdot 10^{100} = 2 \cdot 10^{100} \end{aligned}$$

3. Γράφουμε συνεχώς τη λέξη ΛΥΚΕΙΟ ως εξής: ΛΥΚΕΙΟΛΥΚΕΙΟΛΥΚΕΙΟΛΥΚΕΙΟ...

Το γράμμα που βρίσκεται στη 2016η θέση είναι το:

A. Λ B. Υ Γ. Κ Δ. Ι **E. Ο**

Απάντηση

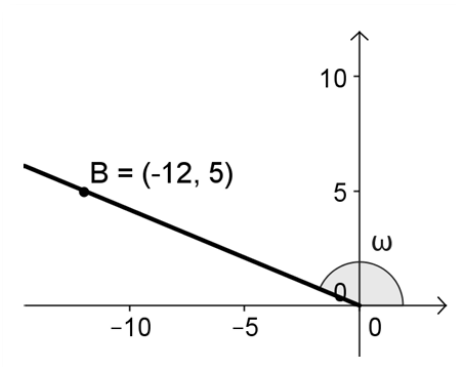
Η λέξη ΛΥΚΕΙΟ έχει 6 γράμματα, άρα, μέχρι τη 2016η θέση του μοτίβου

ΛΥΚΕΙΟΛΥΚΕΙΟΛΥΚΕΙΟΛΥΚΕΙΟ...

επαναλαμβάνεται ακριβώς $2016 : 6 = 336$ φορές, οπότε, στη 2016η θέση του μοτίβου βρίσκεται το τελευταίο γράμμα της λέξης, δηλαδή του Ο.

4. Στο παρακάτω σχήμα το συνω είναι ίσο με:

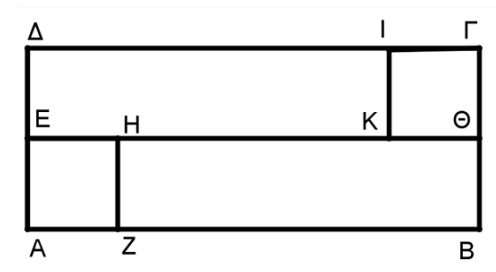
A. $\frac{12}{13}$ **B. $-\frac{12}{13}$** Γ. $-\frac{5}{12}$ Δ. $-\frac{5}{13}$ E. $-\frac{13}{12}$

**Απάντηση**

$$OB = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

$$\text{συν}\omega = \frac{\text{τετμημένη } B}{OB} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}.$$

5. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ με εμβαδόν 400 cm^2 χωρίζεται σε δύο ίσα τετράγωνα ΙΓΘΚ, ΕΗΖΑ και δύο ορθογώνια ΔΙΚΕ, ΗΘΒΖ, όπως στο σχήμα. Αν η μία διάσταση του ορθογωνίου ΔΙΚΕ είναι τετραπλάσια της άλλης, τότε η περίμετρος του αρχικού ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίση με:



Α. 20 cm Β. 16 cm Γ. 28 cm

Δ. $16\sqrt{10}$ cm **Ε. $28\sqrt{10}$ cm**

Απάντηση

Αν x είναι η πλευρά του κάθε τετραγώνου, τότε σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, καθεμιά από τις πλευρές ΑΒ και ΔΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίση με $x + 4x = 5x$ ενώ καθεμιά από τις πλευρές του ΒΓ και ΑΔ είναι ίσες με $x + x = 2x$, οπότε, για το εμβαδόν του ισχύει ότι:

$$AB \cdot BG = 400 \quad \text{ή} \quad 5x \cdot 2x = 400 \quad \text{ή} \quad 10x^2 = 400 \quad \text{ή} \quad x^2 = \frac{400}{10} \quad \text{ή} \quad x^2 = 40 \quad \text{ή}$$

$$x = \sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

Άρα, η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίση με:

$$AB + BG + ΓΔ + ΑΔ = 5x + 2x + 5x + 2x = 14x = 14 \cdot 2\sqrt{10} = 28\sqrt{10}$$

6. Στο παρακάτω σχήμα ΔΕΝ υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

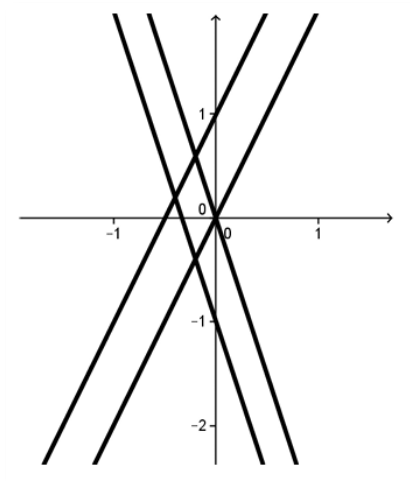
Α. $y = 2x$

Β. $y = -3x$

Γ. $y = -3x - 1$

Δ. $y = -3x + 1$

Ε. $y = 2x + 1$

**Απάντηση**

Η ευθεία $y = -3x + 1$ τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $(0,1)$ διότι για $x=0$: $y = -3 \cdot 0 + 1 = 1$.

Επιπλέον, τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ διότι για $y = 0$ ισχύει:

$$0 = -3x + 1 \quad \text{ή} \quad -3x = -1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{-1}{-3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{3} > 0$$

Όμως, από το σχήμα παρατηρούμε ότι η μοναδική ευθεία η οποία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στο σημείο $(0,1)$, τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε σημείο με αρνητική τετμημένη.

7. Αν για τον πραγματικό αριθμό x , με $x > 1$, ισχύει ότι $x^4 + \frac{1}{x^4} = 27$, τότε η τιμή της παράστασης

$\Sigma = x^2 - \frac{1}{x^2}$ είναι ίση με:

A. 3

B. 5

Γ. 9

Δ. 12

Ε. 25

Απάντηση

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 - 2 + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} - 2 = 27 - 2 = 25.$$

Άρα, $x^2 - \frac{1}{x^2} = 5$ ή $x^2 - \frac{1}{x^2} = -5$.

Όμως, $x > 1$, άρα, $x^2 > 1$ και $\frac{1}{x^2} < 1$, οπότε, $x^2 - \frac{1}{x^2} > 1$.

Συνεπώς, δεκτή είναι η λύση $x^2 - \frac{1}{x^2} = 5$.

8. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0, 2 και 5 γράφουμε όλους τους δυνατούς τριψήφιους αριθμούς. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάθε ψηφίο περισσότερες από μία φορές σε κάθε αριθμό. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν αριθμό από αυτούς, η πιθανότητα να διαιρείται με το 5 είναι:

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

Γ. $\frac{4}{9}$

Δ. $\frac{2}{5}$

Ε. $\frac{1}{2}$

Απάντηση

Όλες οι δυνατές περιπτώσεις τριψήφιων είναι $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ διότι για το ψηφίο των εκατοντάδων επιλέγουμε μεταξύ μόνο του 2 και του 5 ενώ για το ψηφίο των δεκάδων και τον μονάδων επιλέγουμε ένα από τα τρία ψηφία.

Για να διαιρείται ο αριθμός με το 5, πρέπει το ψηφίο των μονάδων να είναι 0 ή 5, άρα οι περιπτώσεις τότε είναι $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Ανοικτού τύπου

9. Σε έναν Μαθηματικό διαγωνισμό κάθε διαγωνιζόμενος πρέπει να απαντήσει σε 60 ερωτήσεις. Για κάθε ερώτηση στην οποία απαντά σωστά, προστίθενται στη βαθμολογία του 5 μονάδες. Για κάθε ερώτηση στην οποία δεν απαντά ή απαντά λανθασμένα, αφαιρούνται από τη βαθμολογία του 3 μονάδες.

- A. Ένας διαγωνιζόμενος συγκέντρωσε συνολικά 20 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;
B. Ένας άλλος διαγωνιζόμενος συγκέντρωσε συνολικά περισσότερες από 293 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

Απάντηση

- A. Αν x είναι ο αριθμός των σωστών απαντήσεων, τότε $5x$ είναι οι βαθμοί που πήρε από τις σωστές απαντήσεις. Επιπλέον, οι λανθασμένες απαντήσεις είναι $60 - x$, οπότε οι βαθμοί που θα αφαιρούνται είναι $3 \cdot (60 - x)$.

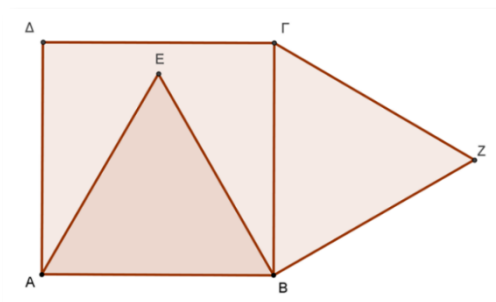
Συνολικά οι βαθμοί που συγκέντρωσε είναι $5x + 3(60 - x)$ και επειδή αυτοί είναι 20, σχηματίζεται η εξίσωση:

$$5x + 3(60 - x) = 20 \quad \text{ή} \quad 5x - 180 + 3x = 20 \quad \text{ή} \quad 5x + 3x = 180 + 20 \quad \text{ή}$$

$$8x = 200 \quad \text{ή} \quad x = \frac{200}{8} \quad \text{ή} \quad x = 25$$

- B. Αν απαντούσε σωστά και στις 60 ερωτήσεις, θα συγκέντρωνε $5 \cdot 60 = 300$ μονάδες ενώ αν απαντούσε σωστά στις 59 ερωτήσεις θα συγκέντρωνε $5 \cdot 59 - 3 = 292$ μονάδες. Άρα, επειδή έχει συγκεντρώσει πάνω από 293 μονάδες, αυτές θα είναι 300 και έχει απαντήσει σωστά και στις 60 ερωτήσεις.

10. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Με πλευρά την ΑΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΕΑΒ εντός του τετραγώνου και ισόπλευρο τρίγωνο ΖΓΒ εκτός του τετραγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.

Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΕΖ.

Γ. Τι είδους γωνία είναι η $\hat{\Delta}\hat{E}Z$;

Απάντηση

Α. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές με $AD = AE$ και $\hat{\Delta}\hat{A}E = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

$$\text{Άρα, } \hat{A}\hat{\Delta}E = \hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ.$$

Β. Το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο, διότι $\hat{E}\hat{B}Z = \hat{E}\hat{B}\Gamma + \hat{\Gamma}\hat{B}Z = 90^\circ - \hat{E}\hat{B}A + 60^\circ = 90^\circ - 60^\circ + 60^\circ = 90^\circ$,
και ισοσκελές με $BE = BZ$. Άρα ισχύει ότι $\hat{B}\hat{E}Z = \hat{B}\hat{Z}E = 45^\circ$.

Γ. Ισχύει ότι $\hat{\Delta}\hat{E}Z = \hat{\Delta}\hat{E}A + \hat{A}\hat{E}B + \hat{B}\hat{E}Z = 75^\circ + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, άρα η γωνία $\hat{\Delta}\hat{E}Z$ είναι ευθεία.