

Κλειστού τύπου

1. Ο Νίκος στα διαγωνίσματα των Μαθηματικών έχει πάρει τις εξής βαθμολογίες:

12, 19, 13, 18, 16

Πόσο πρέπει να πάρει στο 6ο διαγώνισμα για να βγάλει μέσο όρο 16;

A. 14 B. 15 Γ. 16 Δ. 17 **E. 18**

Απάντηση

Αν x είναι ο βαθμός που πρέπει να πάρει στο 6ο διαγώνισμα, τότε έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{12+19+13+18+16+x}{6} = 16 \quad \text{ή} \quad \frac{78+x}{6} = 16 \quad \text{ή} \quad 78+x = 6 \cdot 16 \quad \text{ή} \quad 78+x = 96 \quad \text{ή} \quad x = 96 - 78 \quad \text{ή} \quad x = 18$$

2. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 5$ και $B\Gamma = 13$. Αν AD είναι το ύψος του τριγώνου, τότε το μήκος του DB είναι:

A. $\frac{25}{13}$ B. $\frac{13}{25}$ Γ. $\frac{5}{13}$ Δ. $\frac{13}{5}$ E. 3

Απάντηση

1ος τρόπος

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad 13^2 = 5^2 + A\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad 169 = 25 + A\Gamma^2$$

$$A\Gamma^2 = 169 - 25 \quad \text{ή} \quad A\Gamma^2 = 144 \quad \text{ή} \quad A\Gamma = \sqrt{144} \quad \text{ή} \quad A\Gamma = 12$$

Αν $DB = x$, τότε $D\Gamma = B\Gamma - DB = 13 - x$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + DB^2 \quad \text{ή} \quad 5^2 = A\Delta^2 + x^2 \quad \text{ή} \quad 25 = A\Delta^2 + x^2 \quad \text{ή} \quad A\Delta^2 = 25 - x^2 \quad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + D\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad 12^2 = A\Delta^2 + (13-x)^2 \quad \text{ή} \quad 144 = A\Delta^2 + (13-x)^2 \quad \text{ή}$$

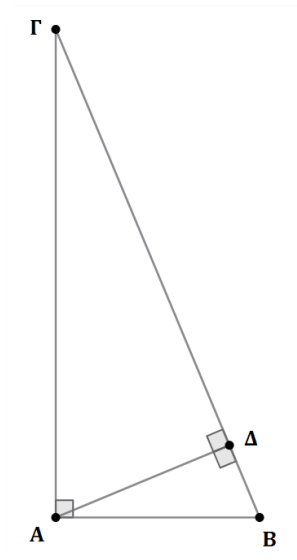
$$A\Delta^2 = 144 - (13-x)^2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$25 - x^2 = 144 - (13-x)^2 \quad \text{ή} \quad 25 - x^2 = 144 - (13^2 - 2 \cdot 13 \cdot x + x^2) \quad \text{ή}$$

$$25 - x^2 = 144 - (169 - 26x + x^2) \quad \text{ή} \quad 25 - x^2 = 144 - 169 + 26x - x^2 \quad \text{ή}$$

$$25 = -25 + 26x \quad \text{ή} \quad 25 + 25 = 26x \quad \text{ή} \quad 26x = 50 \quad \text{ή} \quad x = \frac{50}{26} \quad \text{ή} \quad x = \frac{25}{13}$$



2ος τρόπος

Τα τρίγωνα ABΓ και AΔB είναι όμοια διότι έχουν τη $\hat{B}$ κοινή και $\hat{A} = \hat{A\Delta B} = 90^\circ$ (κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

Άρα ισχύει ότι $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, οπότε $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{B\Gamma}{AB}$ ή $AB^2 = B\Gamma \cdot \Delta B$ ή $\Delta B = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}$.

3. Για το τρίγωνο ABΓ η τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{\text{συν}B \cdot \eta\mu\Gamma}{\epsilon\varphi\Gamma}$, είναι:

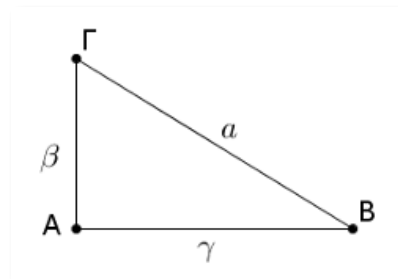
A. 1

B. 0

Γ. $\frac{\alpha^2}{\beta \cdot \gamma}$

Δ. $\frac{\beta \cdot \gamma}{\alpha^2}$

E. $\frac{\gamma^3}{\alpha^2 \cdot \beta}$



Απάντηση

Ισχύει ότι $\text{συν}B = \frac{\gamma}{\alpha}$, $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}$ και $\epsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta}$.

Άρα έχουμε $\Pi = \frac{\frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}}{\frac{\gamma}{\beta}} = \frac{\gamma^2 \cdot \beta}{\alpha^2 \cdot \gamma} = \frac{\gamma \cdot \beta}{\alpha^2}$.

4. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επαληθεύεται από όλα τα ζεύγη (x,y) του πίνακα;

x	y
1	$3\frac{1}{3}$
2	$2\frac{2}{3}$
3	2

A. $x - 3y = 6$

B. $3y - x = 6$

Γ. $2x + 3y = 12$

Δ. $2y + 3x = 12$

E. $y = \frac{2}{9}x^2$

Απάντηση

Το ζεύγος $\left(1, 3\frac{1}{3}\right)$ ή $\left(1, \frac{10}{3}\right)$ δεν επαληθεύει την εξίσωση $x - 3y = 6$ διότι $1 - 3 \cdot \frac{10}{3} = 1 - 10 = -9$ και

όχι 6, ούτε την εξίσωση $3y - x = 6$ διότι $3 \cdot \frac{10}{3} - 1 = 10 - 1 = 9$ και όχι 6, ούτε την εξίσωση $2y + 3x = 12$

διότι $2 \cdot \frac{10}{3} + 3 \cdot 1 = \frac{20}{3} + \frac{9}{3} = \frac{29}{3}$ και όχι 12, αλλά ούτε και την εξίσωση $y = \frac{2}{9}x^2$ διότι $\frac{2}{9} \cdot 1^2 = \frac{2}{9}$ και όχι

$\frac{10}{3}$.

Αντίθετα, η εξίσωση $2x+3y=12$ επαληθεύεται από το ζεύγος $\left(1, \frac{10}{3}\right)$ διότι $2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{10}{3} = 2 + 10 = 12$, από το ζεύγος $\left(2, 2\frac{2}{3}\right)$ ή $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ διότι $2 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{8}{3} = 4 + 8 = 12$ καθώς και από το ζεύγος $(3, 2)$ διότι $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$.

5. Η παράσταση $\Pi = \sqrt{2016 + 2015 \cdot 2016}$ είναι ίση με:

- ☒ Α. 2016 Β. 2017 Γ. $\Pi = \sqrt{2016 \cdot 2015}$
 Δ. 17 Ε. 18

Απάντηση

$$\Pi = \sqrt{2016 + 2015 \cdot 2016} = \sqrt{2016 \cdot (1 + 2015)} = \sqrt{2016 \cdot 2016} = \sqrt{2016^2} = 2016.$$

6. Δίνονται οι αριθμοί $A = 2016$ και $B = 2015$.

1. Να αφαιρέσετε από τον πρώτο τον διπλάσιο του δεύτερου.
2. Να προσθέσετε στον πρώτο τον διπλάσιο του δεύτερου.
3. Να πολλαπλασιάσετε μεταξύ τους, τους δύο αριθμούς που βρήκατε στα 1, 2.
4. Στο προηγούμενο αποτέλεσμα να προσθέσετε το τριπλάσιο του τετραγώνου του B.
5. Να διαιρέσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα με το άθροισμα των A και B.

Ο αριθμός που προέκυψε είναι:

- ☒ Α. 1 Β. 201620001 Γ. 6042,5 Δ. 0 Ε. 2016

Απάντηση

1. $A - 2B$.
2. $A + 2B$.
3. $(A - 2B) \cdot (A + 2B)$.
4. $(A - 2B) \cdot (A + 2B) + 3B^2$
5. $\frac{(A - 2B) \cdot (A + 2B) + 3B^2}{A + B} = \frac{A^2 - (2B)^2 + 3B^2}{A + B} = \frac{A^2 - 4B^2 + 3B^2}{A + B} = \frac{A^2 - B^2}{A + B} = \frac{(A - B)(A + B)}{A + B} = A - B$,
 άρα, ο αριθμός που προέκυψε είναι ο $A - B = 2016 - 2015 = 1$.

7. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει ότι $xy = x - y$, να βρεθεί ποια από τις επόμενες τιμές είναι τιμή της παράστασης $\Pi = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - xy$.

- Α. -1 Β. -2 ☒ Γ. 2 Δ. $-\frac{1}{2}$ Ε. $\frac{1}{2}$

Απάντηση

$$\Pi = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - xy = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} - \frac{(xy)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 - (x-y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)}{xy} =$$

$$\frac{\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{x^2} + 2xy - \cancel{y^2}}{xy} = \frac{2xy}{xy} = 2.$$

8. Αν α και β είναι δύο αριθμοί μεγαλύτεροι του 1, ποιο από τα παρακάτω κλάσματα παριστάνει τον μεγαλύτερο αριθμό;

Α. $\frac{\alpha}{\beta-1}$ Β. $\frac{\alpha}{\beta+1}$ Γ. $\frac{2\alpha}{2\beta+1}$ Δ. $\frac{2\alpha}{2\beta-1}$ Ε. $\frac{3\alpha}{3\beta+1}$

Απάντηση

Τα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta-1}$ και $\frac{\alpha}{\beta+1}$ έχουν τον ίδιο αριθμητή, άρα μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{\alpha}{\beta-1}$.

Τα κλάσματα $\frac{2\alpha}{2\beta+1}$ και $\frac{2\alpha}{2\beta-1}$ έχουν τον ίδιο αριθμητή, άρα μεγαλύτερο είναι αυτό με τον μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{2\alpha}{2\beta-1}$.

Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta-1}$ είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα $\frac{2\alpha}{2\beta-1}$ διότι

$$\frac{\alpha}{\beta-1} > \frac{2\alpha}{2\beta-1} \quad \text{ή} \quad \alpha(2\beta-1) > 2\alpha(\beta-1) \quad \text{ή} \quad 2\alpha\beta - \alpha > 2\alpha\beta - 2\alpha \quad \text{ή} \quad 2\alpha - \alpha > 0 \quad \text{ή} \quad \alpha > 0 \quad (\text{ισχύει})$$

Τέλος, το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta-1}$ είναι μεγαλύτερο από το κλάσμα $\frac{3\alpha}{3\beta+1}$ διότι

$$\frac{\alpha}{\beta-1} > \frac{3\alpha}{3\beta+1} \quad \text{ή} \quad \alpha(3\beta+1) > 3\alpha(\beta-1) \quad \text{ή} \quad 3\alpha\beta + \alpha > 3\alpha\beta - 3\alpha \quad \text{ή} \quad 3\alpha + \alpha > 0 \quad \text{ή} \quad 4\alpha > 0 \quad \text{ή} \quad \alpha > 0 \quad (\text{ισχύει})$$

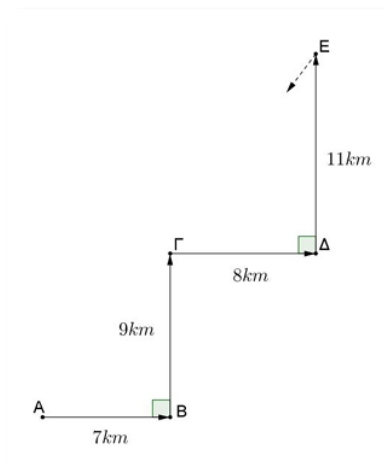
Ανοικτού τύπου

9. Μια βάρκα ξεκινάει από το λιμάνι Α, κινείται ανατολικά για 7 km μέχρι το σημείο Β, στη συνέχεια κινείται βόρεια για 9 km μέχρι το σημείο Γ, μετά πάλι ανατολικά για 8 km μέχρι το σημείο Δ και τέλος 11 km βόρεια μέχρι το λιμάνι Ε. Την επομένη, επιστρέφει από το Ε στο Α κινούμενη ευθύγραμμα.

Α. Να υπολογίσετε την απόσταση ΕΑ των δύο λιμανιών.

Β. Να εξετάσετε αν, κατά την επιστροφή από το Ε στο Α, κινούμενη σε ευθεία γραμμή, η βάρκα θα περάσει από το σημείο Γ.

(Δίνεται: $\sqrt{185} \approx 13,6015$ και $\sqrt{130} \approx 11,4018$)



Απάντηση

A. Προεκτείνοντας τα τμήματα AB και ED, τέμνονται στο σημείο K όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το τρίγωνο EKA είναι ορθογώνιο με $AK=7+8=15$ km και $EK=11+9=20$ km.

Επομένως, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο EKA έχουμε:

$$EA^2 = AK^2 + EK^2 \quad \text{ή} \quad EA^2 = 15^2 + 20^2 \quad \text{ή} \quad EA^2 = 225 + 400$$

$$EA^2 = 625 \quad \text{ή} \quad EA = \sqrt{625} \quad \text{ή} \quad EA = 25 \text{ km}$$

B. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο EΔΓ έχουμε:

$$EG^2 = ED^2 + GD^2 \quad \text{ή} \quad EG^2 = 11^2 + 8^2 \quad \text{ή} \quad EG^2 = 121 + 64$$

$$EG^2 = 185 \quad \text{ή} \quad EG = \sqrt{185} \approx 13,6015 \text{ km}$$

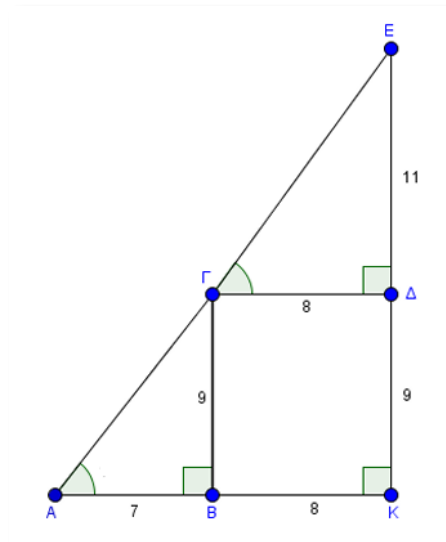
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$AG^2 = AB^2 + BG^2 \quad \text{ή} \quad AG^2 = 7^2 + 9^2 \quad \text{ή} \quad AG^2 = 49 + 81 \quad \text{ή} \quad AG^2 = 130 \quad \text{ή} \quad AG = \sqrt{130} \approx 11,4018 \text{ km}$$

Αν το Γ ήταν σημείο του τμήματος EA, τότε θα ίσχυε $EA = EG + AG$.

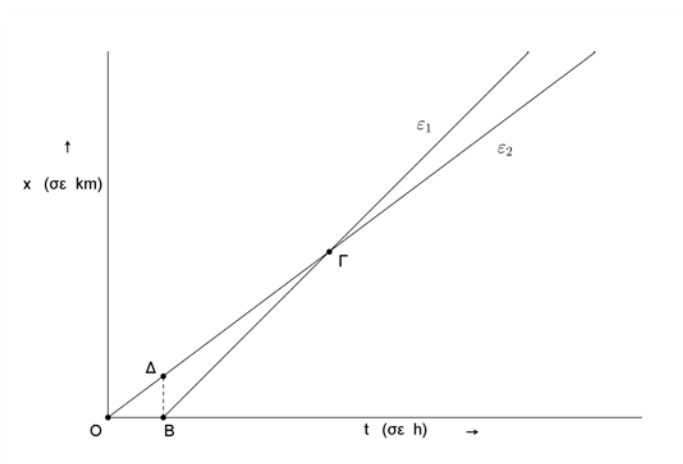
Όμως, $EG + AG \approx 13,6015 + 11,4018 = 25,0033$ km ενώ $EA = 25$ km.

Συνεπώς, το EA δε διέρχεται από το Γ.



- 10.** Ένα λεωφορείο και ένα αυτοκίνητο. ξεκινάνε από την ίδια αφετηρία και κινούνται για 5 ώρες κατά μήκος της ίδιας διαδρομής. Το λεωφορείο κινείται με σταθερή ταχύτητα, ενώ το αυτοκίνητο ξεκινάει 15 min μετά από το λεωφορείο και κινείται με σταθερή ταχύτητα 80 km/h.

- A.** Το αυτοκίνητο θα προσπεράσει το λεωφορείο; Αν ναι, πόση ώρα μετά την εκκίνηση του λεωφορείου θα συμβεί αυτό;
- B.** Στο παρακάτω σύστημα αξόνων έχει σχεδιαστεί ένα τμήμα των γραφικών παραστάσεων των δύο συναρτήσεων, που εκφράζουν την απόσταση του κάθε οχήματος από την αφετηρία ως προς το χρόνο (η απόσταση είναι σε km, ο χρόνος σε h και θεωρούμε ότι το λεωφορείο ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = 0$).



1. Ποια από τις ευθείες ε_1 , ε_2 είναι η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στην κίνηση του λεωφορείου;
2. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Β, Γ και Δ και να εξηγήσετε ποια πληροφορία για την κίνηση των δύο οχημάτων δίνει καθένα από τα ζεύγη συντεταγμένων αυτών των σημείων.

Απάντηση

A. Το λεωφορείο, σε 1 ώρα (h) κάνει 60 km, άρα, σε t ώρες θα κάνει $60 \cdot t$ km.

Το αυτοκίνητο ξεκινάει 15 min ή $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ h μετά το λεωφορείο.

Το αυτοκίνητο, σε 1 ώρα κάνει 80 km, άρα σε $\left(t - \frac{1}{4}\right)$ ώρες κάνει $80 \cdot \left(t - \frac{1}{4}\right)$ km.

Όταν το αυτοκίνητο φτάσει το λεωφορείο (σημείο Γ), επειδή ξεκίνησαν από το ίδιο σημείο (σημείο Ο), θα έχουν κάνει την ίδια απόσταση, άρα, θα ισχύει ότι:

$$60t = 80\left(t - \frac{1}{4}\right) \quad \text{ή} \quad 60t = 80t - 20 \quad \text{ή} \quad 20 = 80t - 60t \quad \text{ή} \quad 20 = 20t \quad \text{ή} \quad t = 1 \text{ h}$$

Συνεπώς, μετά από 1 ώρα, το αυτοκίνητο θα φτάσει το λεωφορείο και θα το προσπεράσει, αφού τρέχει με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτό.

B. 1. Η γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στην κίνηση του λεωφορείου είναι η ευθεία ε_2 διότι ξεκινάει να κινείται πριν το αυτοκίνητο, πριν συναντηθούν έχει διαγράψει μεγαλύτερη απόσταση ενώ μετά τη συνάντησή τους έχει διαγράψει μικρότερη απόσταση.

2. Το αυτοκίνητο ξεκινάει $\frac{1}{4}$ της ώρας μετά το λεωφορείο, δηλαδή όταν $t = \frac{1}{4}$ h, άρα, $B\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

Τη χρονική στιγμή $t = 1$ h, και σε απόσταση 60 km από την αφετηρία, το αυτοκίνητο προσπερνά το φορτηγό, άρα, $\Gamma(1, 60)$.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{4}$ h κατά την οποία ξεκινάει το αυτοκίνητο, το λεωφορείο έχει διανύσει απόσταση $60 \cdot t = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15$ km, άρα $\Delta\left(\frac{1}{4}, 15\right)$.