

Ενδεικτικά θέματα Εξετάσεων 2016 (I) Μαθηματικά

Κλειστού τύπου

1. Δίνεται ο τριψήφιος αριθμός $\overline{12X}$. Η πιθανότητα να διαιρείται με το 3, είναι:

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **Γ.** $\frac{3}{10}$ **Δ.** $\frac{1}{4}$ **Ε.** $\frac{1}{5}$

Απάντηση

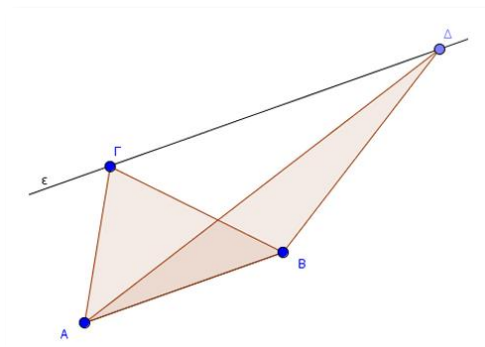
Το πλήθος των τριψήφιων $12X$ είναι 10: 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129.

Από αυτούς, διαιρούνται με το 3 όσοι το άθροισμα των ψηφίων τους διαιρείται με το 3, δηλαδή ο 120 ($1+2+0=3$), ο 123 ($1+2+3=6$), ο 126 ($1+2+6=9$) και ο 129 ($1+2+9=12$), δηλαδή συνολικά 4 από τους 10.

Άρα, η πιθανότητα να διαιρείται κάποιος τριψήφιος $12X$ με το 3 είναι $\frac{4}{10}$ ή $\frac{2}{5}$.

2. Αν στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ϵ) είναι παράλληλη στην AB , τότε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι:

A. 2 **B.** 4 **Γ.** 1
Δ. $\frac{1}{4}$ **Ε.** $\frac{1}{2}$

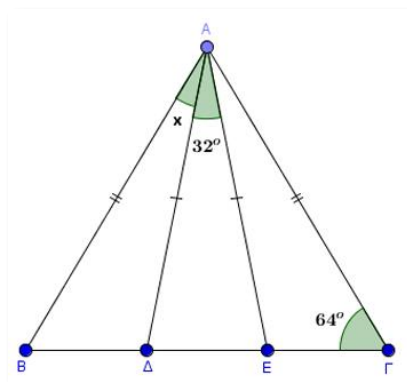


Απάντηση

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ έχουν την ίδια βάση AB και τα αντίστοιχα ύψη τους από το Γ και το Δ προς την ευθεία της βάσης έχουν ίσα μήκη διότι οι ευθείες $\Gamma\Delta$ και AB είναι παράλληλες, άρα, τα εμβαδά των τριγώνων είναι ίσα και ο λόγος τους είναι ίσος με 1.

3. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AD\epsilon$ είναι ισοσκελή και η γωνία $\hat{\Gamma}$ ισούται με 64° και η γωνία $\hat{\Delta\epsilon}$ με 32° . Η γωνία x ισούται με:

A. 16° **B.** 10° **Γ.** 30°
Δ. 20° **Ε.** 32°



Απάντηση

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = 64^\circ \text{ και } \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) = 180^\circ - 2 \cdot \hat{\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 64^\circ = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle ADE$ ισχύει ότι $\hat{ADE} = \hat{AED} = (180^\circ - 32^\circ) : 2 = 148^\circ : 2 = 74^\circ$.

Άρα, η παραπληρωματική γωνία $\hat{ADB}$ της $\hat{ADE}$ είναι ίση με $180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$.

Στο τρίγωνο $\triangle ABD$ ισχύει ότι $\hat{x} = 180 - (\hat{B} + \hat{ADB}) = 180^\circ - (64^\circ + 106^\circ) = 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$.

4. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $(-5, 2)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$:

A. $y = -\frac{2}{5}x$

B. $y = -5$

Γ. $y = 2$

Δ. $x = -5$

E. $y = -\frac{5}{2}x$

Απάντηση

Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, η εξίσωσή τους θα είναι της μορφής $y = \alpha$ όπου α σταθερός αριθμός.

Όμως η ευθεία διέρχεται από το σημείο $(-5, 2)$ το οποίο έχει τεταγμένη $y = 2$, οπότε η εξίσωσή του είναι η $y = 2$.

5. Η παράσταση $\Pi = 4 \left(5 \cdot \frac{x^2}{x^{-1}} \right)^3$ γράφεται ως:

A. $20x^6$

B. $20x^9$

Γ. $250x^9$

Δ. $500x^6$

E. $500x^9$

Απάντηση

$$\Pi = 4 \left(5 \cdot \frac{x^2}{x^{-1}} \right)^3 = 4 \cdot 5^3 \cdot \left(\frac{x^2}{x^{-1}} \right)^3 = 4 \cdot 125 \cdot \frac{(x^2)^3}{(x^{-1})^3} = 500 \cdot \frac{x^6}{x^{-3}} = 500 \cdot x^{6-(-3)} = 500 \cdot x^{6+3} = 500 \cdot x^9.$$

6. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\Pi = 7 - (x - 6)^2$;

A. -6

B. 1

Γ. 6

Δ. 7

E. 9

Απάντηση

Η ποσότητα $(x - 6)^2$ είναι θετική ή μηδέν, οπότε όταν αφαιρείται από το 7, η τιμή της παράστασης Π μειώνεται. Άρα, η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης Π είναι το 7 και αυτό συμβαίνει όταν η ποσότητα $(x - 6)^2$ είναι ίση με μηδέν, δηλαδή για $x = 6$.

7. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ και $B = \frac{x - y}{x + y}$, με $x > y > 0$.

Να επιλέξετε τη σχέση που ισχύει για τα A, B:

A. $A < 2B$

B. $A > 2B$

Γ. $A = 2B$

Δ. $A < B$

E. $A \geq 2B$

Απάντηση

Θα αποδείξουμε την πρώτη ανισότητα $A < 2B$.

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < \frac{2(x - y)}{x + y} \quad (\text{Πολλαπλασιάζουμε με το ΕΚΠ} = (x^2 + y^2)(x + y) \text{ το οποίο είναι θετικό})$$

$$(x^2 - y^2)(x + y) < 2(x - y)(x^2 + y^2)$$

$$x^3 + x^2y - y^2x - y^3 < 2(x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3)$$

$$x^3 + x^2y - y^2x - y^3 < 2x^3 + 2xy^2 - 2yx^2 - 2y^3$$

$$0 < 2x^3 + 2xy^2 - 2yx^2 - 2y^3 - x^3 - x^2y + y^2x + y^3 \quad (\text{Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων})$$

$$0 < x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (\text{Εφαρμόζουμε την ταυτότητα του κύβου διαφοράς})$$

$$0 < (x - y)^3 \quad (\text{Η ανισότητα ισχύει διότι } x > y \text{ ή } x - y > 0, \text{ οπότε και } (x - y)^3 > 0).$$

Επειδή $A < 2B$, τα Β, Γ και Ε απορρίπτονται.

Θα δείξουμε ότι δεν ισχύει $A < B$.

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} < \frac{x - y}{x + y}$$

$$(x^2 - y^2)(x + y) < (x - y)(x^2 + y^2)$$

$$\cancel{x^3} + x^2y - y^2x - \cancel{y^3} < \cancel{x^3} + xy^2 - yx^2 - \cancel{y^3}$$

$$2x^2y - 2xy^2 < 0$$

$$2xy(x - y) < 0 \quad (\text{δεν ισχύει διότι } x > y \text{ ή } x - y > 0 \text{ και } x > y > 0 \text{ άρα } xy > 0 \text{ οπότε } 2xy(x - y) > 0).$$

8. Οι λύσεις της εξίσωσης $\frac{x^2 - x}{1 - x} = 1$, είναι:

A. 1

B. 2

Γ. ± 1

Δ. -1

E. 0

Απάντηση

Πρέπει $1 - x \neq 0$ ή $1 \neq x$.

$$\frac{x^2 - x}{1 - x} = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 - x = 1 - x \quad \text{ή} \quad x^2 = 1 \quad \text{ή} \quad x^2 - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad (x + 1)(x - 1) = 0$$

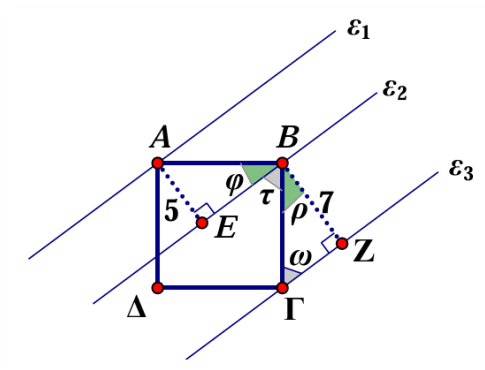
$$\text{ή} \quad (x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0) \quad \text{ή} \quad (x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -1)$$

Δεκτή είναι μόνο η λύση $x = 1$.

Ανοικτού τύπου

9. Τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ διέρχονται από τις κορυφές Α, Β, Γ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Η απόσταση μεταξύ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι $AE = 5 \text{ cm}$ και η απόσταση μεταξύ των $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι $BZ = 7 \text{ cm}$.



Τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες φ και ρ είναι ίσες.
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και BΓZ είναι ίσα.
- γ) Να βρείτε το μήκος του ΓZ.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ABΓΔ.

Απάντηση

- α) $\hat{\tau} = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ που τέμνονται από τη BΓ.

Στο τετράγωνο ABΓΔ ισχύει ότι $\hat{B} = 90^\circ$ ή $\hat{\tau} + \hat{\phi} = 90^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο BZΓ ισχύει ότι $\hat{\omega} + \hat{\rho} = 90^\circ$.

Άρα, $\hat{\tau} + \hat{\phi} = \hat{\omega} + \hat{\rho}$ ή $\hat{\phi} = \hat{\rho}$.

- β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και BΓZ είναι ίσα, διότι έχουν ίσες υποτείνουσες $AB = B\Gamma$ (ως πλευρές του τετραγώνου ABΓΔ) και $\hat{\phi} = \hat{\rho}$.
- γ) Αφού τα τρίγωνα ABE και BΓZ είναι ίσα ισχύει ότι $BZ = BE$ και $\Gamma Z = AE = 5$ cm.
- δ) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο BΓZ έχουμε: $B\Gamma^2 = 7^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$.

Συνεπώς, το εμβαδόν του τετραγώνου ABΓΔ είναι ίσο με $B\Gamma^2 = 74 \text{ cm}^2$.

10. Ένας αθλητής, κατά τη διάρκεια της προπόνησής του, όταν κολυμπάει ελεύθερο, διανύει 120 μέτρα σε ένα λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πρόσθιο, διανύει 90 μέτρα σε ένα λεπτό. Υποθέτουμε ότι ο αθλητής έχει σταθερή ταχύτητα στο ελεύθερο και σταθερή ταχύτητα στο πρόσθιο στυλ.

- A) Να βρείτε την ταχύτητα του αθλητή στο ελεύθερο και την ταχύτητά του στο πρόσθιο σε m/sec.
- B) Ο αθλητής, κατά τη διάρκεια της προπόνησης, κολύμπησε 300 μέτρα κάνοντας αρχικά ελεύθερο, για x sec, και μετά πρόσθιο, για y sec.
- 1) Να γράψετε μια γραμμική εξίσωση η οποία να συνδέει τους χρόνους x και y .
 - 2) Αν ο αθλητής κάλυψε αυτά τα 300 μέτρα σε 3 λεπτά, να υπολογίσετε τους αντίστοιχους χρόνους που κολύμπησε ελεύθερο και πρόσθιο και, στη συνέχεια, τις αποστάσεις που κάλυψε με κάθε στυλ.

Απάντηση

- A) Η ταχύτητα του αθλητή στο ελεύθερο είναι $\frac{120 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{120 \text{ m}}{60 \text{ sec}} = 2 \text{ m/sec}$.

Η ταχύτητα του αθλητή στο πρόσθιο είναι $\frac{90 \text{ m}}{1 \text{ min}} = \frac{90 \text{ m}}{60 \text{ sec}} = 1,5 \text{ m/sec}$.

B) 1) Ο αθλητής σε 1 sec κολυμπάει 2 m ελεύθερο, άρα, σε x sec κολυμπάει $2x$ m ελεύθερο.

Επιπλέον, ο αθλητής σε 1 sec κολυμπάει 1,5 m πρόσθιο, άρα σε y sec κολυμπάει $1,5y$ m πρόσθιο.

Συνολικά, ο αθλητής κολυμπάει $(2x + 1,5y)$ m και επειδή είναι ίσα με 300 m ισχύει ότι

$$2x + 1,5y = 300$$

2) Τα $(x + y)$ sec είναι ίσα με $3 \cdot 60 = 180$ sec, άρα ισχύει ότι $x + y = 180$.

Προκύπτει, λοιπόν, το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 180 \\ 2x + 1,5y = 300 \end{cases}$$

$\cdot (-2) \begin{cases} x + y = 180 \\ 2x + 1,5y = 300 \end{cases}$ ή $\begin{cases} -2x - 2y = -360 \\ 2x + 1,5y = 300 \end{cases}$ και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι

$$-0,5y = -60 \quad \text{ή} \quad y = \frac{-60}{-0,5} \quad \text{ή} \quad y = 120 \text{ sec}, \quad \text{άρα} \quad x = 180 - 120 = 60 \text{ sec}.$$

Τελικά, σε $x = 60$ sec ο αθλητής κολύπησε $2x = 2 \cdot 60 = 120$ m ελεύθερο και σε $y = 120$ sec κολύπησε $1,5y = 1,5 \cdot 120 = 180$ m πρόσθιο.