Θέματα
Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού στα Μαθηματικά «Ο Θαλής»

2006 – 2025

Γ΄ Γυμνασίου

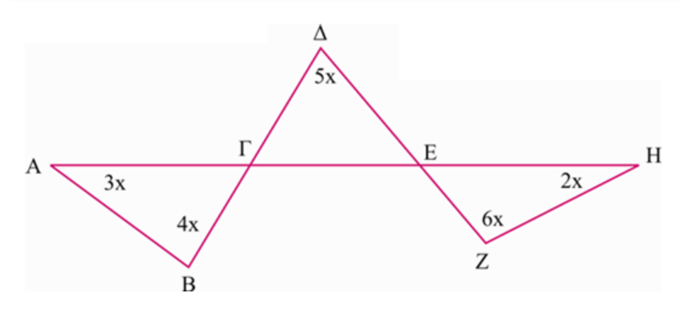
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (www.hms.gr)

Περιεχόμενα

Τα θέματα αντλούνται από την ιστοσελίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (www.hms.gr)

ΘΕΜΑ 1ο

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το x σε μοίρες



ΘΕΜΑ 2ο

Αν $\alpha+2\beta+\frac{\gamma}{2}=0$ και $\alpha\beta\gamma=10$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\alpha^2\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)^2\cdot(\alpha+2\beta)^2$$

ΘΕΜΑ 3ο

Αν p είναι πρώτος αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $27p+1$ είναι σύνθετος.

ΘΕΜΑ 4ο

Να εξετάσετε αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α, β διάφοροι του μηδενός, τέτοιοι ώστε

$$\frac{3}{2}\alpha\beta^{-1}+\frac{10}{3}\alpha^{-1}\beta=3$$

Θέματα 68ου Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού στα Μαθηματικά «Ο Θαλής» (2007)

ΘΕΜΑ 1ο

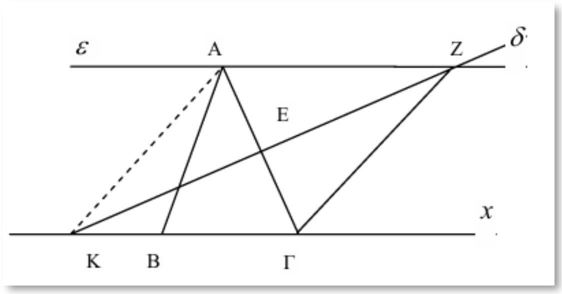
Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4, \quad B=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right]$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A > B$.

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$ και $Β\hat{Α}Γ=40^\circ$. Η ευθεία ε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ και η ευθεία δ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ.



α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Ζ\hat{Γ}x$,

β) Να αποδείξετε ότι $ΚΑ=ΑΖ$.

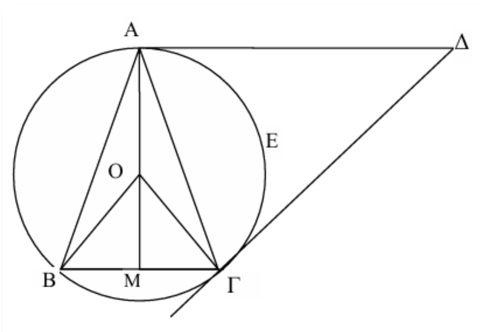
ΘΕΜΑ 3ο

α) Να αποδείξετε ότι, αν ένας φυσικός αριθμός είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε το τελευταίο του ψηφίο ανήκει στο σύνολο $Σ=\{0,1,4,5,6,9\}$.

β) Να βρεθεί πενταψήφιος φυσικός αριθμός της μορφής $A=\alpha\alpha\alpha bb$, όπου α, b ψηφία με $\alpha \neq 0$, ο οποίος είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, περιττός και διαιρείται με το 9.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ=ΑΓ$ και $Β\hat{Α}Γ=30^\circ$. Η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και η ΓΔ είναι κάθετη προς την ΟΓ.



α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΕΓ συναρτήσει της πλευράς $ΒΓ=\alpha$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της πλευράς $ΒΓ=\alpha$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\dfrac{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2009}\right]^0}$, $B=\dfrac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\dfrac{x}{2}$.

Αν είναι $A=B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

ΘΕΜΑ 2ο

Το σημείο $A(-\lambda+2,4\lambda+1)$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy. Να βρεθούν:

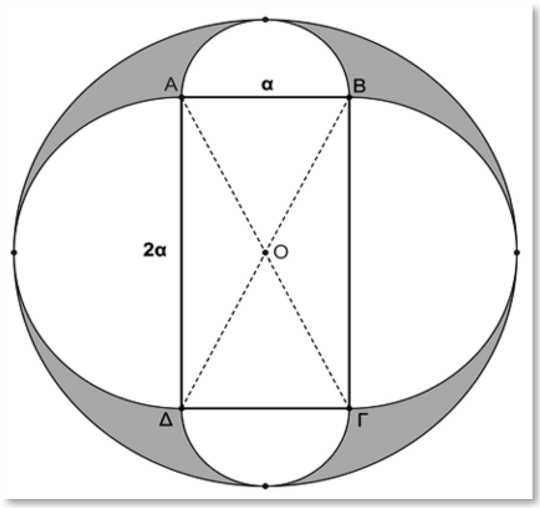
α) ο θετικός ακέραιος λ ,

β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ και

γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΟΒΑΓ , όπου Β, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο Α στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy, αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $AB=\alpha$, $A\Delta=2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



ΘΕΜΑ 4ο

Αν ισχύει $\dfrac{45^\nu\cdot 2^{2\nu}}{6^\nu}=900$, όπου ν θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A=2003\cdot(-1)^\nu-(-1)^{\nu+1}+4\cdot(-1)^{\nu+2}$$

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ν είναι φυσικός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A=4(-1)^{\nu}+2\cdot\frac{(-1)^{2\nu+1}}{5}-7\cdot\frac{(-1)^{3\nu}}{5}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Ο θετικός ακέραιος α είναι περιττός και όταν διαιρεθεί με το 5 αφήνει υπόλοιπο 2.
Να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού α.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται δύο ευθείες ε_1, ε_2, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\eta): y=2x$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή του συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, Α είναι το κοινό σημείο των ευθειών ε_1, ε_2 και Β είναι το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι έχουν το ίδιο κέντρο Ο και ακτίνες r_1, r_2, r_3 με $0<r_1<r_2<r_3$.

Έστω Δ_1 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_1, r_2 και Δ_2 ο κυκλικός δακτύλιος που ορίζεται από τους κύκλους κέντρου Ο με ακτίνες r_2, r_3.

Αν είναι $r_2-r_1=r_3-r_2$ και $r_3=3r_1$, να βρείτε τον λόγο $\dfrac{E(\Delta_1)}{E(\Delta_2)}$, όπου $E(\Delta_1)$ και $E(\Delta_2)$ είναι τα εμβαδά των κυκλικών δακτυλίων Δ_1 και Δ_2, αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν $x+y=3\cdot(-2)^2$ και $y-w=\left[\left(-\dfrac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\dfrac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A=7x+10y-3w-87$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρείτε έναν τετραψήφιο φυσικό αριθμό, αν γνωρίζετε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

(α) Το ψηφίο των μονάδων του είναι πολλαπλάσιο του 4,

(β) Το ψηφίο των δεκάδων του είναι το μισό του ψηφίου των μονάδων του,

(γ) Το ψηφίο των εκατοντάδων του είναι διαιρέτης του 5 ,

(δ) Το ψηφίο των χιλιάδων του είναι ίσο με το ψηφίο των εκατοντάδων του μειωμένο κατά 1.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=120^\circ$. Στο εσωτερικό της γωνίας Α φέρουμε ημιευθείες Αx και Αy κάθετες στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ, αντίστοιχα που τέμνουν την πλευρά ΒΓ στα σημεία Δ και Ε, αντίστοιχα. Αν $A\hat{\Delta}B=120^\circ$, $A\hat{E}\Delta=60^\circ$ και το ύψος ΑΗ έχει μήκος $2\sqrt{3}$ μονάδες μήκους, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

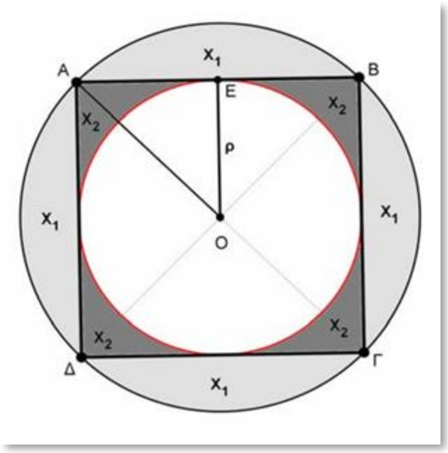
ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά 2ρ. Ονομάζουμε X_1 το χωρίο που αποτελείται από τα τέσσερα κυκλικά τμήματα του κύκλου $C(O,OA)$ που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ. Επίσης ονομάζουμε X_2 το χωρίο που βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου $C(O,\rho)$ και εσωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

α) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου $\Delta(O,\rho,OA)$ που ορίζεται από τους κύκλους $C(O,\rho)$ και $C(O,OA)$.

β) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά $E(X_1)$ και $E(X_2)$ των χωρίων X_1 και X_2, αντίστοιχα, έχουν λόγο $\dfrac{E(X_1)}{E(X_2)}$ μεγαλύτερο του $\dfrac{13}{5}$.

γ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα x του κύκλου $C(O,x)$ που χωρίζει τον κυκλικό δακτύλιο $\Delta(O,\rho,OA)$ σε δύο κυκλικούς δακτυλίους ίσου εμβαδού.



ΘΕΜΑ 1ο

Αν $\alpha = 10^{-1} : 10^{-3}$, $\beta = 10^{-5} : 10^{-7}$ και $\gamma = 10^{-1} \cdot 1000$ να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right)^{-2}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρεθούν οι ακέραιοι που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4} \le 2 \quad \text{και} \quad \frac{\frac{x}{2} - 3}{4} - \frac{2x-9}{8} \le x$$

ΘΕΜΑ 3ο

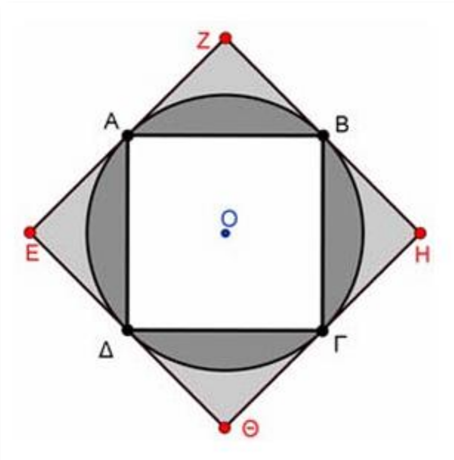
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνεται ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (3\lambda - 1)x + 2\mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί, είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y = 2\lambda x$ και περνάει από το σημείο $K(2,8)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ.

β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $M(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα. Το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρές που εφάπτονται του κύκλου $C(O,\rho)$ στα σημεία Α, Β, Γ και Δ.



α) Να βρείτε το άθροισμα Σ_1 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου $C(O,\rho)$ και εξωτερικά του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

β) Να βρείτε το άθροισμα Σ_2 των εμβαδών των τεσσάρων χωρίων που βρίσκονται εσωτερικά του τετραγώνου ΕΖΗΘ και εξωτερικά του κύκλου $C(O,\rho)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} < \frac{4}{3}$. (Θεωρήστε ότι $\pi = 3{,}1415$).

ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}}\ ,\ \text{αν είναι}\ \ x=2^{-10},\ y=4^{-8},\ z=8^{-6},$$

και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

ΘΕΜΑ 2ο

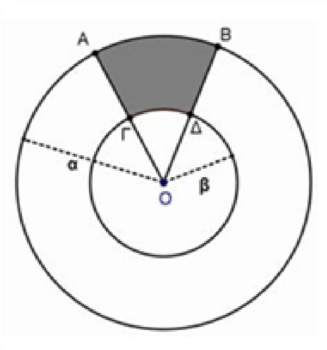
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α οι αριθμοί 3 και −3 είναι λύσεις της ανίσωσης

$$4x-5\alpha+2<\alpha(x-3)+2(\alpha-1)$$

ΘΕΜΑ 3ο

Αν το εμβαδόν Ε του χωρίου ΑΒΔΓ του διπλανού σχήματος ισούται με το $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους κύκλους (O,α) και (O,β), $0<\beta<\alpha$, να βρείτε τη γωνία $\omega=A\hat{O}B$ και την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma=\left(2\eta\mu^2\omega-\frac{3}{4}\sigma\upsilon\nu 2\omega\right)^3$$



ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $A\Delta=\alpha$ cm και $AB<A\Delta$. Η κάθετη από την κορυφή Β προς τη διαγώνιο ΑΓ την τέμνει στο σημείο Ε. Αν ισχύει ότι $E\Gamma=2\cdot AE$, να βρείτε:

i) το μήκος της πλευράς ΑΒ.

ii) το εμβαδόν του κύκλου που περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 3\cdot(3\alpha - 4{,}6) - 2\cdot(\alpha - 0{,}2)$$

ΘΕΜΑ 2ο

Αν ο θετικός ακέραιος β ικανοποιεί τις ανισώσεις

$$-4 < 1 - 2\beta < 5$$

να λύσετε ως προς τον άγνωστο x την ανίσωση

$$2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1) < \frac{x}{\beta}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Στο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς xOψ μια ευθεία (ε) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 45° και επίσης διέρχεται από το σημείο $M(2,-6)$. Το σημείο Α ανήκει στον άξονα x΄x και στην ευθεία (ε), ενώ το σημείο Β ανήκει στον άξονα ψ΄ψ και στην ευθεία (ε).

α) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

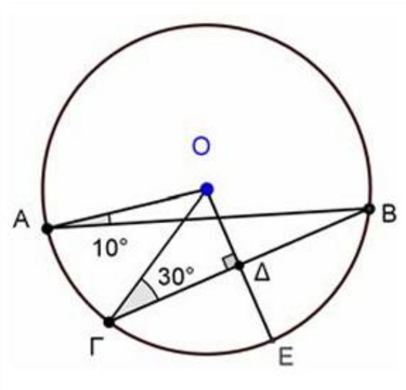
β) Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

γ) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ.

ΘΕΜΑ 4ο

Σε κύκλο $c(O,R)$ (κέντρου Ο και ακτίνας R) δίνονται σημεία Α, Γ και Β τέτοια ώστε $O\hat{A}B = 10^\circ$ και $O\hat{\Gamma}B = 30^\circ$.

Τα σημεία Α και Γ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΟΒ. Από το σημείο Ο φέρουμε ευθεία κάθετη προς τη χορδή ΓΒ που την τέμνει στο σημείο Δ, ενώ τέμνει τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο Ε.



α) Βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ και το μέτρο του τόξου ΑΓ σε μοίρες.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΕΓ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\dfrac{6}{13}$, αν $x=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Το πλήθος των μαθητών σε ένα Γυμνάσιο είναι τουλάχιστον 170 και το πολύ 230. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς το 4% των μαθητών παίζουν βιολί και ότι το $\dfrac{1}{3}$ από αυτούς που παίζουν βιολί, παίζει και πιάνο, να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Γυμνασίου.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα $ΓΔ=\dfrac{α}{2}$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήμα $ΓΖ=ΑΔ$. Αν Ε(ΑΒΔ) και Ε(ΑΒΔΖ) είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ και του τετραπλεύρου ΑΒΔΖ, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο $\dfrac{Ε(ΑΒΔ)}{Ε(ΑΒΔΖ)}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα διαμάντι Δ κόβεται σε δύο κομμάτια $Δ_1$ και $Δ_2$ με βάρη $β(Δ_1)$ και $β(Δ_2)$, αντίστοιχα, και λόγω βαρών $\dfrac{β(Δ_1)}{β(Δ_2)}=\dfrac{3}{7}$. Δίνεται ότι η αξία ενός διαμαντιού είναι ευθέως ανάλογη προς το τετράγωνο του βάρους του.

Να προσδιορίσετε πόσο επί τοις εκατό μειώθηκε η αξία του διαμαντιού Δ μετά την κοπή του στα δύο κομμάτια $Δ_1$ και $Δ_2$.

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=\frac{\alpha-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+\alpha^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$, αν $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρεθεί ο τριψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$, αν δίνεται ότι το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού διαιρείται με τον αριθμό 4, ενώ για τα ψηφία των μονάδων και των εκατοντάδων ισχύει ότι $\alpha=\frac{28}{\nu}$ και $\gamma=\frac{42}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ και $B\hat{A}\Gamma=\omega^{o}$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ, την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Ζ. Η κάθετη από το σημείο Β προς την πλευρά ΑΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Κ, το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ στο Λ και το ευθύγραμμο ΑΖ στο σημείο Μ. Αν είναι $\Gamma\hat{A}Z=36^{o}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\omega=36^{o}$,

β) $AM=\Gamma Z$,

γ) $B\Lambda=\Lambda Z$.

ΘΕΜΑ 4ο

Αν οι x, y, z, w, m είναι θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί ανά δύο μεταξύ τους, μικρότεροι ή ίσοι του 5, τότε να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A=(x+y)\cdot z^{m}-w$.

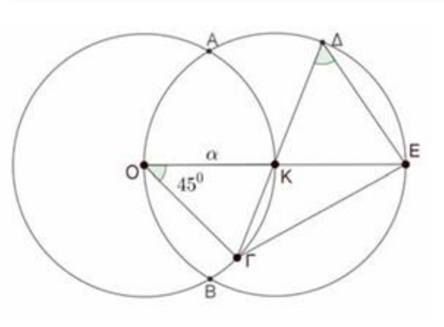
ΘΕΜΑ 1ο

Αν $\alpha = \dfrac{12^{\nu}}{3^{\nu}} : 2^{2\nu-1}$ και $\beta = 10^{2\nu+1} : 100^{\nu}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\left(\alpha^3 - \beta^3\right) + \alpha^2\beta - 2\beta + 2\alpha^2}{\alpha^2 + \alpha\beta - 10\alpha}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα $OK = \alpha$ και δύο κύκλοι ακτίνας α που έχουν κέντρα στα σημεία Ο και Κ, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Το σημείο Γ ανήκει στο τόξο ΚΒ και η ευθεία ΓΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Δ. Η ευθεία ΟΚ τέμνει τον κύκλο C_2 κέντρου Κ και ακτίνας α στο σημείο Ε. Αν είναι $K\hat{O}\Gamma = 45^{o}$, να βρείτε:



α) πόσες μοίρες είναι η γωνία $K\hat{\Delta}E$ και

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΓΕ συναρτήσει του α.

ΘΕΜΑ 3ο

Ο Γιώργος και οι φίλοι του έχουν 450 καραμέλες τις οποίες μοίρασαν μεταξύ τους σε ίσα μερίδια και ο καθένας πήρε ακέραιο αριθμό καραμέλες. Όμως τρεις από τους φίλους του Γιώργου του επέστρεψαν το 20% του μεριδίου τους. Έτσι ο Γιώργος πήρε συνολικά περισσότερες από 120 καραμέλες. Να βρείτε πόσοι ήταν συνολικά ο Γιώργος και οι φίλοι του και πόσες καραμέλες πήρε ο Γιώργος.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι αριθμοί $A = \overline{3\alpha 5b} = 3\cdot 10^3 + \alpha \cdot 10^2 + 5\cdot 10 + b$ και $B = \overline{5c3d} = 5\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + d$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ψηφία α, b, c, d, ισχύει ότι: $\dfrac{A}{36} < \dfrac{B}{45}$.

β) Αν ανάμεσα στα κλάσματα $\dfrac{A}{36}, \dfrac{B}{45}$ υπάρχουν ακριβώς δύο ακέραιοι, να βρεθούν οι δυνατές τιμές των ψηφίων α, b, c, d.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν ο αριθμός ν είναι θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-10)^{2\nu+1}}{2^{2\nu+1}}+\frac{(-15)^{2\nu-1}}{(-3)^{2\nu-1}}\right)\cdot(-2017)^2+\frac{(-8)^{2\nu}}{2^{2\nu}}-\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2\nu}+2018$$

ΘΕΜΑ 2ο

Η αυλή ενός σπιτιού σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου καλύπτεται με δύο ειδών πλάκες, λευκές και μαύρες, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Το $\frac{1}{3}$ του συνολικού πλήθους των πλακών είναι λευκές. Επίσης το εμβαδό κάθε λευκής πλάκας είναι εννεαπλάσιο από το εμβαδό κάθε μαύρης πλάκας. Αν οι μαύρες πλάκες καλύπτουν εμβαδό 80 τ.μ., να βρείτε το εμβαδό της αυλής.

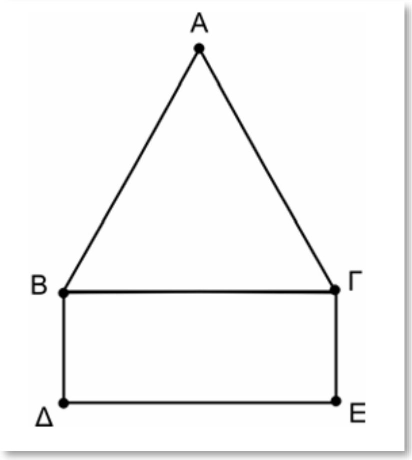
ΘΕΜΑ 3ο

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 6 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς α.

Το σχήμα ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την πλευρά $B\Delta=\frac{\alpha}{2}$.



α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta=AE$.

β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΔΓ.

ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-20)^{11}}{4^{11}}+\frac{(-25)^{11}}{(-5)^{11}}\right)\cdot(-2018)^2+\frac{(-8)^{20}}{2^{20}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-20}+200$$

ΘΕΜΑ 2ο

Ο Νίκος αγόρασε 4 μήλα από τα οποία το βαρύτερο ζυγίστηκε πρώτο και ήταν 120 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το δεύτερο μήλο και ο μέσος όρος του βάρους των δύο πρώτων μήλων ήταν 115 γραμμάρια. Στη συνέχεια ζυγίστηκε το τρίτο μήλο και παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τριών μήλων ήταν μικρότερος από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των δύο πρώτων μήλων κατά 10 γραμμάρια. Τέλος όταν ζυγίστηκε το τέταρτο μήλο παρατήρησε ότι ο μέσος όρος του βάρους των τεσσάρων μήλων ήταν επίσης μικρότερος κατά 10 γραμμάρια από τον προηγούμενο μέσο όρο του βάρους των τριών μήλων. Να βρείτε πόσα γραμμάρια ήταν καθένα από τα τρία μήλα που ζυγίστηκαν μετά το πρώτο.

Σημείωση: Ο μέσος όρος ν αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ είναι ο αριθμός $\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακεραίου α, για τις οποίες η εξίσωση $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x-\alpha}{x-6}$ έχει ακέραιες λύσεις.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές $(AB=A\Gamma)$ με $\hat{A}=40^\circ$ και για το σημείο Δ ισχύει ότι: $\Delta A=\Delta B=\Delta\Gamma$.

Αν η ΓΜ είναι παράλληλη στην ΑΔ και το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές $(AB=AE)$, να αποδείξετε ότι:

α) η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$,

β) $\Gamma\hat{A}E=100^\circ$,

γ) η ΑΜ είναι κάθετη στην ΓΕ.

ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right)$$

ΘΕΜΑ 2ο

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ. Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021}$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023}$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Gamma}$, $\mathrm{\Delta\hat{B}\Gamma}$, $\mathrm{E\hat{\Delta}\Gamma}$ και $\mathrm{Z\hat{E}\Gamma}$ είναι ορθές.

Δίνεται ακόμη ότι:

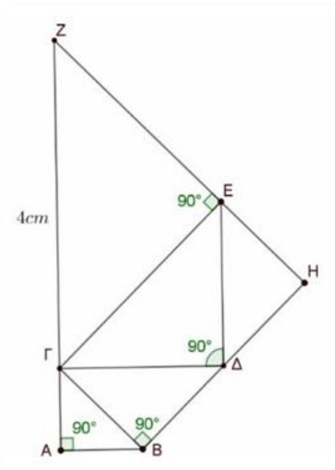
$$\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma},\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{B\Delta},\ \mathrm{\Delta\Gamma}=\mathrm{\Delta E},\ \mathrm{E\Gamma}=\mathrm{EZ}\quad\text{και}\quad \mathrm{\Gamma Z}=4\ \mathrm{cm}$$

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.



ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-3)^{-7}}{(-3)^{-6}}+\frac{(-6)^{-8}}{12^{-7}}+20^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{-35}}{5^{-35}}+\frac{(-22)^{-35}}{(-11)^{-35}}+2021\right)$$

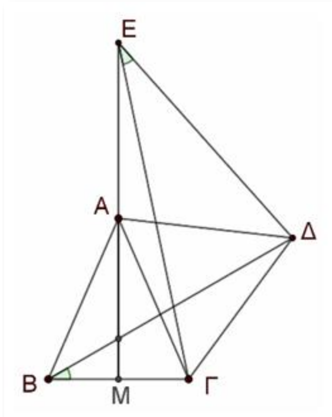
ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma>B\Gamma$.

Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΓΔ.

Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $AE=AB$.

Να αποδείξετε ότι: $\Delta\hat{B}\Gamma=\Gamma\hat{E}\Delta=30^{o}$.



ΘΕΜΑ 3ο

Σε μία παρέα κάποια μέλη της αποτελούν την ομάδα Μ που αγαπάει τα Μαθηματικά, ενώ τα υπόλοιπα μέλη αποτελούν την ομάδα Φ που αγαπάει τη Φυσική. Ο μέσος όρος των ηλικιών των μελών που αγαπούν τα Μαθηματικά είναι 25 χρόνια, ενώ αυτών που αγαπούν τη Φυσική είναι 35 χρόνια. Όμως δύο μέλη της ομάδας Φ δήλωσαν ότι πλέον άλλαξαν προτίμηση και ζήτησαν να ενταχθούν στην ομάδα Μ. Τότε ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Μ έγινε 27, ενώ ο μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας Φ έγινε 37. Να βρείτε πόσα μέλη είχε συνολικά η παρέα και να δώσετε ένα παράδειγμα μιας τέτοιας παρέας.

ΘΕΜΑ 1ο

Ο Γιάννης μπορεί να χρησιμοποιήσει απεριόριστες φορές το ψηφίο 9 και ακριβώς μία μόνο φορά το ψηφίο 2 για να γράψει θετικούς ακέραιους. Να βρείτε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο που μπορεί να γράψει ο Γιάννης ο οποίος διαιρείται με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων του συνόλου $\Sigma = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

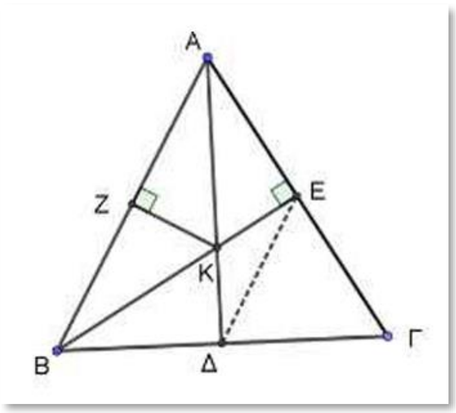
ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο η διχοτόμος ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, το ύψος ΒΕ και η μεσοκάθετη ΖΚ της πλευράς ΑΒ περνούν από το ίδιο σημείο Κ.

α) Να βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ, να αποδείξετε ότι

$$K\Delta = KE = KZ$$



ΘΕΜΑ 3ο

Μία σχολική τάξη έχει συνολικά Α μαθητές. Μία μαθήτρια, η Μαρία, αποφασίζει να στείλει ευχετήριες κάρτες στα υπόλοιπα παιδιά της τάξης. Όμως, ξεχνάει να βάλει γραμματόσημο σε $\frac{A}{4}$ από αυτές που είχε ετοιμάσει, οπότε στέλνει τις υπόλοιπες. Από τις υπόλοιπες, λόγω καθυστέρησης του ταχυδρομείου, μόνο το $\frac{1}{10}$ έφτασε εγκαίρως. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του Α;

ΘΕΜΑ 1ο

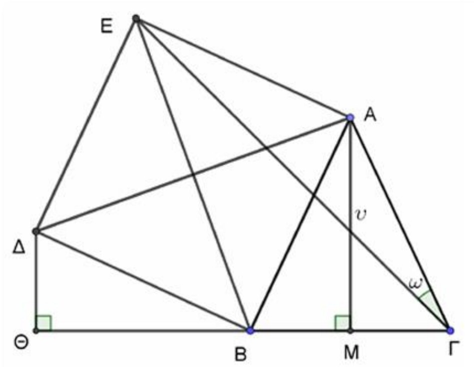
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5}+\frac{(-44)^5}{(-4)^5}\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}}-(-5)^{10}+10^3\right)$$

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο.

Αν είναι $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}=\omega$, $\Delta\hat{\Theta}\mathrm{B}=90^{\circ}=\mathrm{A\hat{M}B}$ και $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$, $\mathrm{AM}=\upsilon$, τότε να βρείτε:



1) Το μέτρο της γωνίας $\mathrm{E\hat{\Gamma}B}$.
2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και υ.

ΘΕΜΑ 3ο

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή πληθυσμού ήταν Α κάτοικοι, όπου $35.000<\mathrm{A}<40.000$. Δίνεται ότι ο αριθμός Α, όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3.

Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η αριθμητική παράσταση $A=\left[\dfrac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}}+3\cdot\dfrac{32^6}{4^5}\right]^{100} : \left(12^2-4^2\right)^{300}$.

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης Α ως δύναμη με βάση το 2.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $A=\overline{2023xy}$, όπου x, y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Να προσδιορίσετε τα ψηφία x, y έτσι ώστε ο αριθμός Α να διαιρείται με τον αριθμό 17.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουσδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός από τους 7 δεδομένους που διαιρείται με το 10.

ΘΕΜΑ 4ο

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $AB=\alpha$, $B\Gamma=2\alpha$.

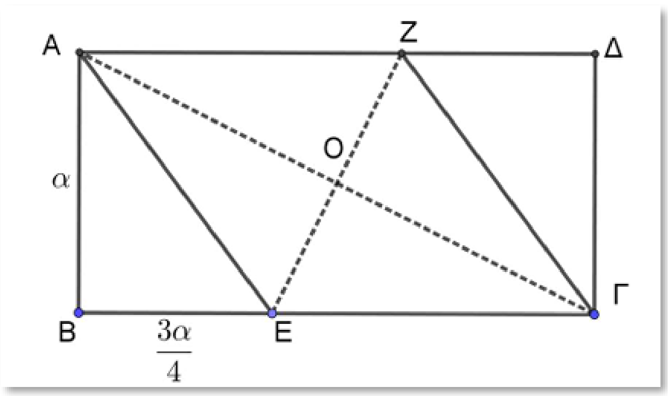
Οι ευθείες ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλες και $BE=\dfrac{3\alpha}{4}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AE=AZ$,

β) Η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ περνάει από το Ο που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΖΕ.

γ) $A\Gamma=2\cdot EZ$.



ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$A=\left(\left(-\frac{99}{9}\right)^2+\frac{(-3)^5}{9^2}\right)\cdot(-2024)^0-118-\frac{2}{21}\,,\quad B=\frac{(-20)^8}{4^8}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-8}-\frac{3}{32}$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

ΘΕΜΑ 2ο

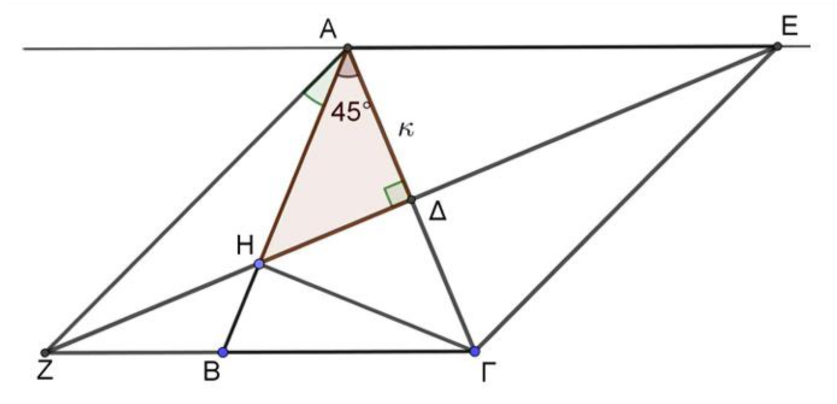
Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma$ που είναι εικοσαπλάσιοι του αθροίσματος των ψηφίων τους.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$ και $\hat{A}=45^\circ$. Το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την παράλληλη ευθεία από το σημείο Α προς την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε, την πλευρά ΑΒ στο σημείο Η και την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $Z\hat{A}B$.

β) Αν $A\Delta=\kappa$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΓΕ συναρτήσει του κ.



ΘΕΜΑ 1ο

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις

$$A=\left(\left(-\frac{18}{3}\right)^2+\frac{(-2)^2}{3^2}\right)\cdot\frac{1}{78}-\frac{2}{3}\,, \qquad B=\frac{(-18)^8}{3^8}-\left(-\frac{1}{6}\right)^{-8}-\frac{25}{117}$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί

$$A=\overline{\alpha\beta\gamma}=100\alpha+10\beta+\gamma\,,\;\; B=\overline{\beta\gamma}=10\beta+\gamma\,,\;\; \Gamma=\overline{\alpha\beta}=10\alpha+\beta \;\;\text{με}\;\; \alpha,\beta\neq 0$$

Αν ο αριθμός Α είναι πολλαπλάσιο του 3, να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του Α για τις οποίες ισχύει η ισότητα:

$$A=B+8\Gamma$$

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η ευθεία ΑΕ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΒΔ και η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΓ.

Να αποδείξετε ότι:

1) Το τετράπλευρο ΑΟΔΕ είναι ρόμβος.

2) $EB=E\Gamma$