

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**  
**ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΚΡΟΥΣΕΙΣ – ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ**  
**Α.ΜΙΧΑΛΟΥΔΗΣ, Σ.ΣΑΜΑΡΑΣ, Α.ΣΑΡΡΗΓΙΑΝΝΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

Στις ερωτήσεις **A1 – A4** να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στην επιλογή σας, η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση.

**A1.** Για να ακινητοποιηθεί μία κινούμενη σφαίρα μάζας  $m$  πρέπει να κάνει κεντρική ελαστική κρούση με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας

- ☒ α)  $m$                       β)  $2m$                       γ)  $3m$                       δ)  $\frac{m}{2}$

**A2.** Δύο σφαίρες  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  έχουν αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων  $v_1$  και  $v_2$  αντίστοιχα και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά την κρούση οι σφαίρες  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  έχουν αλγεβρικές τιμές ταχυτήτων  $v'_1$  και  $v'_2$  αντίστοιχα. Ισχύει:

- α)  $v_1 + v_2 = v'_1 + v'_2$                       ☒ β)  $v_1 - v_2 = -v'_1 + v'_2$   
γ)  $v_1 + v_2 = v'_1 - v'_2$                       δ)  $v_1 + v_2 = v'_2 - v'_1$

**A3.** Μία ρόδα βρίσκεται ακίνητη πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Δίνουμε στη ρόδα μία γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}$ .

Η ρόδα θα

- ☒ α) εκτελέσει μόνο στροφική κίνηση.  
β) εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση.  
γ) εκτελέσει και μεταφορική και στροφική κίνηση.  
δ) ακινητοποιηθεί μετά από κάποιο χρονικό διάστημα.

**A4.** Η Γη γυρίζει γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά, στην οποία ο Ήλιος βρίσκεται στη μία από τις δύο εστίες. Όταν η Γη βρίσκεται στο πλησιέστερο σημείο στον Ήλιο (περιήλιο) έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου  $v_\pi$ , ενώ όταν βρίσκεται στο πιο απομακρυσμένο σημείο από τον Ήλιο (αφήλιο) έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου  $v_\alpha$ . Για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει

- α)  $v_\pi = v_\alpha$                       ☒ β)  $v_\pi > v_\alpha$                       γ)  $v_\pi < v_\alpha$                       δ)  $v_\pi = v_\alpha = 0$

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Δύο κινούμενα σώματα συγκρούονται και μετά την κρούση η συνολική κινητική τους ενέργεια είναι ίση με μηδέν. Η κρούση είναι ελαστική. **Λ**  
β) Σφαίρα εκτελεί πλάγια ελαστική κρούση με ακίνητο τοίχο μεγάλης μάζας. Κατά την κρούση δεν μεταβάλλεται το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας. **Σ**  
γ) Τα μηχανικά στερεά δεν παραμορφώνονται όταν τους ασκούνται δυνάμεις. **Σ**

δ) Το κέντρο μάζας ενός σώματος μπορεί να βρίσκεται έξω από το σώμα.  $\Sigma$

ε) Η στροφορμή ενός σημείου της περιφέρειας μιας ρόδας αυτοκινήτου, που κινείται σε οριζόντιο δρόμο προς το Βορρά, έχει κατεύθυνση προς το Νότο.  $\Delta$

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = m$  κινείται προς τα θετικά του άξονα  $x'x$  με ταχύτητα μέτρου  $v_0$ . Το σώμα  $\Sigma_1$  συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 3m$ . Μετά την κρούση το σώμα  $\Sigma_1$  κινείται προς τα θετικά του άξονα  $y'y$ , ο οποίος είναι κάθετος στον άξονα  $x'x$ , με ταχύτητα μέτρου  $v_1$ , ενώ το σώμα  $\Sigma_2$  έχει ταχύτητα μέτρου  $v_2$  που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον άξονα  $x'x$ . Το ημίτονο της γωνίας  $\theta$  είναι ίσο με:

i.  $\frac{1}{3}$

ii.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

iii.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. **iii**

β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

#### Απάντηση

Α.Δ.Κ.Ε. για την κρούση:

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}3mv_2^2 \Rightarrow v_0^2 = v_1^2 + 3v_2^2 \quad (1)$$

Α.Δ.Ο. στον άξονα  $y'y$ :

$$\vec{p}_{\text{αρχ},y} = \vec{p}_{\text{τελ},y} \Rightarrow p_{\text{αρχ},y} = p_{\text{τελ},y} \Rightarrow 0 = mv_1 - 3mv_2 \eta \mu \theta \Rightarrow v_1 = 3v_2 \eta \mu \theta \quad (2)$$

Α.Δ.Ο. στον άξονα  $x'x$ :

$$\vec{p}_{\text{αρχ},x} = \vec{p}_{\text{τελ},x} \Rightarrow p_{\text{αρχ},x} = p_{\text{τελ},x} \Rightarrow mv_0 = 3mv_2 \sigma \eta \nu \theta \Rightarrow v_0 = 3v_2 \sigma \eta \nu \theta \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (2) και (3) στην εξίσωση (1):

$$(3v_2 \sigma \eta \nu \theta)^2 = (3v_2 \eta \mu \theta)^2 + 3v_2^2 \Rightarrow 9v_2^2 \sigma \eta \nu^2 \theta = 9v_2^2 \eta \mu^2 \theta + 3v_2^2 \Rightarrow$$

$$3 \sigma \eta \nu^2 \theta = 3 \eta \mu^2 \theta + 1 \Rightarrow 3(1 - \eta \mu^2 \theta) = 3 \eta \mu^2 \theta + 1 \Rightarrow 3 - 3 \eta \mu^2 \theta = 3 \eta \mu^2 \theta + 1 \Rightarrow 2 = 6 \eta \mu^2 \theta \Rightarrow$$

$$\eta \mu^2 \theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \eta \mu \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

**B2.** Ελικόπτερο πετάει με οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $v_0$  προς τα θετικά του άξονα  $x'x$ . Κάθε έλικά του, που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο της, έχει μήκος  $\ell = \frac{12}{\pi}$  m και περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο. Έστω Α σημείο της περιφέρειας της έλικας. Στον άξονα  $x'x$  η μέγιστη αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σημείου Α είναι ίση με  $v_{\text{max}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , ενώ η ελάχιστη είναι  $v_{\text{min}} = -44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Η συχνότητα περιστροφής κάθε έλικας είναι ίση με:

i. 5 Hz

ii. 6 Hz

iii. 7 Hz

α) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. **ii**

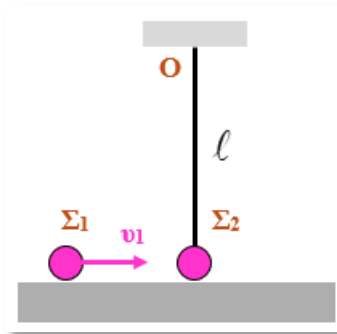
β) Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

#### Απάντηση



### ΘΕΜΑ Γ

Σφαίρα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 1 \text{ kg}$  βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  προς μία άλλη ακίνητη σφαίρα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 2 \text{ kg}$ . Η σφαίρα  $\Sigma_2$  είναι δεμένη στο κάτω άκρο αβαρούς και μη εκτατού κατακόρυφου νήματος μήκους  $\ell = 40 \text{ cm}$ , το πάνω άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο  $O$ . Το νήμα είναι συνεχώς τεντωμένο και η κρούση των σφαιρών είναι κεντρική και ελαστική και διαρκεί ελάχιστο χρονικό διάστημα. Να υπολογίσετε:



Γ1. τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών αμέσως μετά την κρούση,

#### Απάντηση

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{1 - 2}{1 + 2} 3 \Rightarrow v'_1 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 2} 3 \Rightarrow v'_2 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Γ2. το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας  $\Sigma_1$  που παίρνει η σφαίρα  $\Sigma_2$  κατά την κρούση,

#### Απάντηση

$$\frac{K'_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2} m_2 v'^2_2}{\frac{1}{2} m_1 v^2_1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2} = \frac{8}{9} \text{ ή } \frac{800}{9} \%$$

Γ3. το μέγιστο ύψος στο οποίο ανέρχεται η σφαίρα  $\Sigma_2$ .

#### Απάντηση

Έστω  $\vec{T}_v$  η τάση του νήματος που ασκείται στη σφαίρα  $\Sigma_2$ . Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας  $\Sigma_2$  από την κατώτερη θέση αμέσως μετά την κρούση, μέχρι την ανώτερη θέση που η ταχύτητα μηδενίζεται:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = w_{\text{ολ}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = w_w + w_{T_v} \Rightarrow -\frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 = -m_2 g h_{\text{max}} + 0 \Rightarrow$$

$$4 = 2 \cdot 10 \cdot h_{\text{max}} \Rightarrow h_{\text{max}} = \frac{4}{20} \Rightarrow h_{\text{max}} = 0,2 \text{ m}$$

Καθώς η σφαίρα  $\Sigma_2$  ανέρχεται μετά την κρούση, διέρχεται από θέση  $K$ , η οποία απέχει απόσταση  $h = 0,1 \text{ m}$  από το έδαφος. Να υπολογίσετε στη θέση  $K$ :

Γ4. τη στροφορμή της σφαίρας  $\Sigma_2$  ως προς το σημείο  $O$ ,

#### Απάντηση

Θα υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας  $\Sigma_2$  σε ύψος  $h = 0,1 \text{ m}$  (θέση  $\Lambda$ ) από το έδαφος.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. για την κίνηση της σφαίρας  $\Sigma_2$  από την κατώτερη θέση αμέσως μετά την κρούση, μέχρι τη θέση  $\Lambda$ :

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = w_{\text{ολ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v^2 - \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = w_w + w_{T_v} \Rightarrow \frac{1}{2} 2 v^2 - \frac{1}{2} 2 \cdot 2^2 = -m_2 g h + 0 \Rightarrow$$

$$v^2 - 4 = -2 \cdot 10 \cdot 0,1 \Rightarrow v^2 - 4 = -2 \Rightarrow v^2 = 2 \Rightarrow v = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άρα το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας  $\Sigma_2$  στη θέση Λ, ως προς το σημείο Ο, είναι:

$$L = m_2 v \ell \Rightarrow L = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 0,4 \Rightarrow L = 0,8\sqrt{2} \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Η διεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής είναι κάθετη στο επίπεδο του σχήματος, διέρχεται από το σημείο Ο και έχει φορά από το σχήμα προς τον αναγνώστη ( $\odot$ ).

**Γ5.** το μέτρο της τάσης του νήματος.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.

#### Απάντηση

Το συνημίτονο της γωνίας  $\theta$  είναι ίσο με:

$$\cos \theta = \frac{\ell - h}{\ell} \Rightarrow \cos \theta = \frac{0,4 - 0,1}{0,4} \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{4}$$

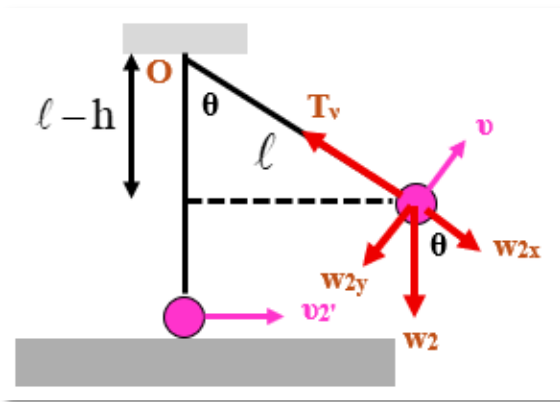
Για την κεντρομόλο δύναμη ισχύει:

$$\Sigma F = F_c \Rightarrow T_v - w_{2x} = \frac{m_2 v^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$T_v - m_2 g \cos \theta = \frac{m_2 v^2}{\ell} \Rightarrow$$

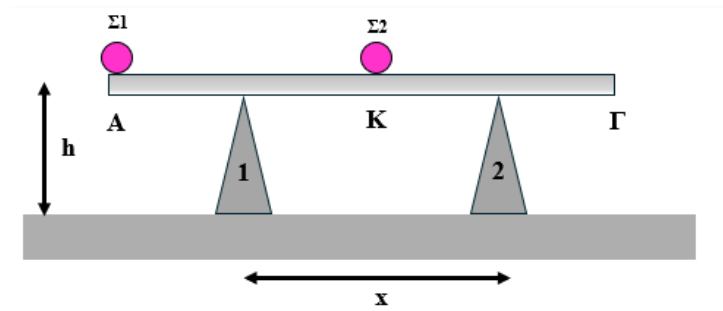
$$T_v - 20 \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}^2}{0,4} \Rightarrow$$

$$T_v - 15 = 10 \Rightarrow T_v = 25 \text{ N}$$



#### ΘΕΜΑ Α

Λεία ομογενής και ισοπαχής σανίδα ΑΓ μάζας  $m = 1 \text{ kg}$  και μήκους  $\ell = 4 \text{ m}$ , με κέντρο το σημείο Κ, διατηρείται πάντοτε οριζόντια στηριζόμενη σε δύο μυτερά στηρίγματα (1) και (2). Τα στηρίγματα μπορούν να μετατοπίζονται οριζόντια, αλλά πάντοτε είναι συμμετρικά του σημείου Κ και εκατέρωθέν του. Στο σημείο Α βρίσκεται ακίνητη σφαίρα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1 = 1 \text{ kg}$  και στο κέντρο Κ βρίσκεται ακίνητη δεύτερη σφαίρα  $\Sigma_2$  μάζας  $m_2 = 3 \text{ kg}$ . Η σανίδα απέχει από το έδαφος απόσταση  $h = 80 \text{ cm}$ .



**Δ1.** Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση  $x$  των δύο στηριγμάτων, ώστε να μην ανατρέπεται η σανίδα.

#### Απάντηση

Έστω Π και Ρ τα σημεία που ακουμπάνε τη σανίδα τα στηρίγματα  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  αντίστοιχα.

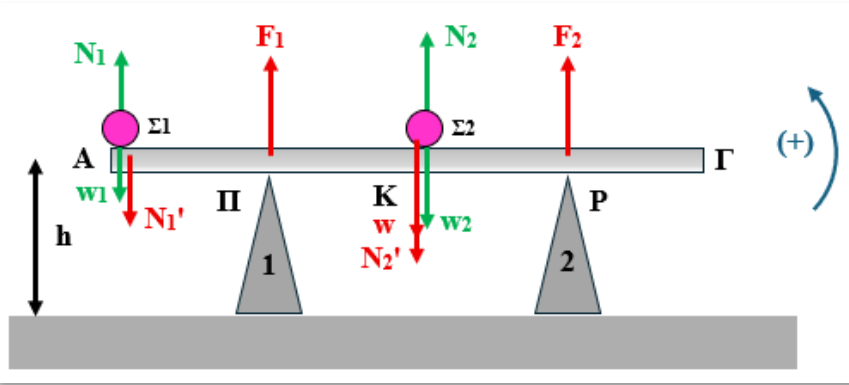
Η σφαίρα  $\Sigma_1$  ισορροπεί:  $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 - w_1 = 0 \Rightarrow N_1 = w_1 \Rightarrow N_1 = m_1 g \Rightarrow N_1 = 10 \text{ N}$ .

Δράση-Αντίδραση:  $N'_1 = N_1 = 10 \text{ N}$ .

Η σφαίρα  $\Sigma_2$  ισορροπεί:  $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 - w_2 = 0 \Rightarrow N_2 = w_2 \Rightarrow N_2 = m_2 g \Rightarrow N_2 = 10 \text{ N}$ .

Δράση-Αντίδραση:  $N'_2 = N_2 = 10 \text{ N}$ .

Όταν η σανίδα ισορροπεί οριακά, η δύναμη  $\vec{F}_2$  που δέχεται από το στηρίγμα (2) τείνει να μηδενιστεί:



$$\Sigma \tau_{(II)} = 0 \Rightarrow \tau_{N'_1} + \tau_{F_1} + \tau_w + \tau_{N'_2} = 0 \Rightarrow N'_1 \left( 2 - \frac{x}{2} \right) + 0 - w \frac{x}{2} - N'_2 \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$10 \left( 2 - \frac{x}{2} \right) - 10 \frac{x}{2} - 30 \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 5x - 5x - 15x = 0 \Rightarrow 20 = 25x \Rightarrow x = \frac{20}{25} \Rightarrow x = 0,8 \text{ m}$$

Τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  βάζουμε τη σφαίρα  $\Sigma_1$  με οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  προς τη σφαίρα  $\Sigma_2$ . Οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

**Δ2.** Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση,

#### Απάντηση

Η σανίδα είναι λεία, άρα οι ταχύτητες των σφαιρών μεταβάλλονται μόνο κατά την κρούση.

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{1 - 3}{1 + 3} 2 \Rightarrow v'_1 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2 \cdot 1}{1 + 3} 2 \Rightarrow v'_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Δ3.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της απόστασης των δύο σφαιρών σε συνάρτηση με το χρόνο, από τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  ως τη χρονική στιγμή που θα φτάσουν στο έδαφος.

#### Απάντηση

Η κρούση γίνεται τη χρονική στιγμή  $t_1$ :  $\frac{\ell}{2} = v_1 t_1 \Rightarrow 2 = 2 t_1 \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$ .

Οι σφαίρες  $\Sigma_1$  και  $\Sigma_2$  φτάνουν στα άκρα Α και Γ αντίστοιχα της σανίδας ταυτόχρονα τη χρονική στιγμή  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 + \frac{\frac{\ell}{2}}{|v'_1|} \Rightarrow t_2 = 1 + \frac{2}{1} \Rightarrow t_2 = 3 \text{ s}$$

Ο χρόνος της ελεύθερης πτώσης  $\Delta t$  είναι ίσος με:

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{0,16} \Rightarrow \Delta t = 0,4 \text{ s}$$

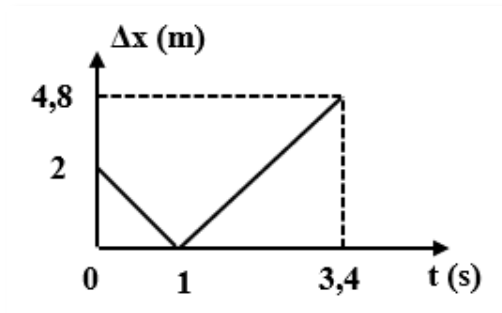
Από τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  ως τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1 \text{ s}$  η απόσταση των σφαιρών μειώνεται γραμμικά:

$$\Delta x = 2 - v_1 t \Rightarrow \Delta x = 2 - 2t \text{ (S.I.)}$$

Από τη χρονική στιγμή  $t_1 = 1 \text{ s}$  ως τη χρονική στιγμή  $t_3 = t_2 + \Delta t \Rightarrow t_3 = 3 + 0,4 \Rightarrow t_3 = 3,4 \text{ s}$  η απόσταση των σφαιρών αυξάνεται γραμμικά, και τη στιγμή  $t_3 = 3,4 \text{ s}$  είναι ίση με:

$$\Delta x = (|v'_1| + v'_2)(t_3 - t_1) \Rightarrow \Delta x = 2 \cdot 2,4 \Rightarrow \Delta x = 4,8 \text{ m}$$

Να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι σφαίρες βρίσκονται συνεχώς στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο  $\left(y = \frac{1}{2} g t^2\right)$  και οι οριζόντιες ταχύτητές τους δεν μεταβάλλονται. Άρα η γραφική παράσταση είναι:



- Δ4.** Αν η κρούση των σφαιρών ήταν πλαστική, να υπολογίσετε την κινητική ενέργεια με την οποία θα έφτανε το συσσωμάτωμα στο έδαφος.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Η αντίσταση του αέρα να θεωρηθεί αμελητέα.

#### Απάντηση

Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση:

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_k \Rightarrow 1 \cdot 2 = (1 + 3) v_k \Rightarrow 2 = 4 v_k \Rightarrow v_k = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Εφαρμόζουμε Α.Δ.Μ.Ε. για την κίνηση του συσσωματώματος από τη χρονική στιγμή  $t_1$  ως τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος. Θεωρούμε το έδαφος ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας.

$$E_{\text{μηχ,αρχ}} = E_{\text{μηχ,τελ}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_k^2 + (m_1 + m_2) g h = K_{\text{τελ}} + 0 \Rightarrow$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} 4 \cdot 0,5^2 + 4 \cdot 10 \cdot 0,8 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 0,5 + 32 \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 32,5 \text{ J}$$