

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F .

Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το $α$ έως το $β$;

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω το 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

β) Εάν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$, τότε

$$\text{ισχύει: } \left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^{\beta} e^x dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[α, β]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$, τότε

$$\int_a^{\beta} f(x) dx \geq \int_a^{\beta} g(x) dx$$

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_a^{\beta} \eta \mu x dx = \dots\dots\dots$

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και c μια σταθερά, τότε: $(c \cdot f)'(x) = \dots\dots\dots$

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε: $(x^\alpha)' = \dots\dots\dots$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x & , 0 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} & , x > 1 \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

B2. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €).

Μισθός (εκατοντάδες €)	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων)	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i \cdot v_i$
x_i	v_i		
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$v = \dots$	100	

- Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.
- Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των μισθών των υπαλλήλων.
- Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 € ;
- Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$, $x \in \mathbb{R}$.
- Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 4$.
- Δ3. Για $\alpha = -5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.
- Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x^2 - 12x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 6x - 24$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.