ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, ..., t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1-\bar{x}, t_2-\bar{x}, ..., t_\nu-\bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και είναι ίσο με $\ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^\nu = \ell^\nu$, όπου ν φυσικός αριθμός.

β. Για κάθε $x>0$ ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

γ. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 95% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

δ. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

ε. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$, όπου ν_i η συχνότητα της τιμής x_i και ν το μέγεθος του δείγματος.

ΘΕΜΑ Β

Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα είναι: 7, 8, 10, 5, 11, 7 .

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:

α. τη μέση τιμή $\bar{x}$,

β. τη διάμεσο δ ,

γ. τη διακύμανση s^2.

Β2. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Β3. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - \kappa x + 2,\ \kappa \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

Γ2. Για $\kappa = 3$ να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2 - 1}$.

Γ3. Για $\kappa = 3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4} + \dfrac{3}{4}$.

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \dfrac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Δ4. Αν οι τιμές $f(-1), f(1), f(0,25), f(-0,5), f(0)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X, τότε να τις διατάξετε κατά αύξουσα σειρά και να υπολογίσετε το εύρος τους (R) και τη διάμεσό τους (δ).