

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ όπου } c \in \mathbb{R}, x \in A$$

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i .

β. Η ταχύτητα $v(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 , $v(t_0) = f'(t_0)$.

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , τότε:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να απαντήσουν σε μία ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός υποψηφίων v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
$[0,2)$	1	
$[2,4)$	7	
$[4,6)$	4	
$[6,8)$		
$[8,10)$	1	
ΣΥΝΟΛΟ	20	100

B1. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} του χρόνου που χρειάστηκαν οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

- B3.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην ερώτηση;
- B4.** Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$).
- B5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$) και τον οριζόντιο άξονα.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

Έστω ότι $f'(1) + 3, 8, f(1), 7, f(2), 10$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

- Γ1.** Να βρείτε τις τιμές των παρατηρήσεων, τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των παραπάνω παρατηρήσεων είναι $s = 2$.
- Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(\frac{R}{3}, f\left(\frac{R}{3}\right)\right)$, όπου R το εύρος των παραπάνω παρατηρήσεων.
- Γ4.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρήστε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) = x^2 + \frac{4s^2}{x} + \bar{x} - 27, \text{ με } x \neq 0,$$

όπου \bar{x} και s είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και το σημείο $K(1, 0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- Δ1.** Να δείξετε ότι $s = 2$ και $\bar{x} = 10$.
- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.
- Δ3.** Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1}-3}$.
- Δ4.** Έστω ότι y_1, y_2, \dots, y_n είναι οι τιμές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις x_1, x_2, \dots, x_n αντίστοιχα, όταν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών y_1, y_2, \dots, y_n .