ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$, όπου $x, c\in\mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή $f'(x)=(c)'=0$.

Α2. Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, ..., w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται ο σταθμικός μέσος $\bar{x}$ της μεταβλητής X.

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A, μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

β. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος ν.

γ. Αν οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού της, με $g(x)\neq 0$ για όλες τις τιμές του x, τότε ισχύει: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)}$.

δ. Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος:

$$13,\ 12,\ \lambda+5,\ 9,\ 14,\ 15,\ \kappa,\ 12,\ 17,\ 13$$

όπου: $\lambda=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\lambda=2$.

Β2. Για $\lambda=2$ να υπολογίσετε την τιμή του κ, αν η μέση τιμή $(\bar{x})$ των προϊόντων είναι 12.

Β3. Για $\lambda=2$ και $\kappa=8$ να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση (s) των τιμών των προϊόντων είναι 3.

Β4. Για $\lambda=2$ και $\kappa=8$ να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο: $f(x)=x^3-2x^2-\alpha x+2$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^{o}.

Γ2. Για $\alpha=-1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Γ3. Για $\alpha=-1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

Γ4. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι:

$$f(2019)+f(2020)>2\cdot f(1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=(\lambda-3)x^2-\lambda x+\lambda^2-6\lambda,$$

όπου για τη σταθερά λ ισχύει $0<\lambda<3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι $y=-\lambda x+\lambda^2-6\lambda$.

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot(\lambda-6)^2$.

Δ3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να γίνει μέγιστο.

Δ4. Για $\lambda=2$ δίνονται τα σημεία $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, $A_3(x_3,y_3)$, $A_4(x_4,y_4)$, $A_5(x_5,y_5)$ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$. Αν οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 αντίστοιχα, έχουν τυπική απόκλιση $s_x=2$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.