

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

A2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση v της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

β. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A , τότε ορίζεται και η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$

με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X , με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2 τότε για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $v_2 = N_2 + N_1$, όπου $N_1 = v_1$.

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(\eta\mu x)' = \dots$

β. $(x^\rho)' = \dots$, όπου ρ ρητός αριθμός.

γ. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots$, όπου $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i
0	1		
1	κ^2		
2	8		
3	$\kappa - 1$		
Σύνολο	20	100	

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.
- B2.** Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές τιμές.
- B3.** Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας;
- B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$.

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x < -1$.
- Γ2.** Αν $x \in [-4, -2]$, να αποδείξετε ότι $-3 \leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$.
- Γ3.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- Γ4.** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία K και L αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OKL , όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - \alpha^2 - 8\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.
- Δ2.** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του α .
- Δ3.** Να βρείτε για ποια τιμή του α το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.
- Δ4.** Για $\alpha = -4$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)}$.