

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_v$  οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $v$ , που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$ . Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με 0.

**Απάντηση**

$$\frac{\sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})}{v} = \frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_v - \bar{x})}{v} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} - \frac{v\bar{x}}{v} = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

**A2.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής;

**Απάντηση**

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  λέγεται συνεχής, αν για κάθε  $x_0 \in A$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις του δείγματος. **Λάθος**

**β.** Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς. **Σωστό**

**γ.** Η παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς το  $x$ , όταν  $x = x_0$ . **Σωστό**

**δ.** Αν  $f$  παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε ισχύει  $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

**Σωστό**

**ε.** Αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ . **Λάθος**

**A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

**α.**  $(c)' = \dots 0 \dots$

**β.**  $(x^2)' = \dots 2x \dots$

**ΘΕΜΑ Β**

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι σε μία επιχείρηση κατά τη διάρκεια του μήνα.

Πλήθος ωρών $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$
0	...	...	...
1	15	...	...
2	11	...	...
3	8	...	...
4	6	...	50
ΣΥΝΟΛΟ	50	100	

**Β1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

**Απάντηση**

Πλήθος ωρών $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$
0	<b>10</b>	<b>20</b>	<b>10</b>
1	15	<b>30</b>	<b>25</b>
2	11	<b>22</b>	<b>36</b>
3	8	<b>16</b>	<b>44</b>
4	6	<b>12</b>	50
ΣΥΝΟΛΟ	50	100	

$$v_1 = v - (v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = 50 - (15 + 11 + 8 + 6) = 50 - 40 = 10, \text{ οπότε και } N_1 = v_1 = 10.$$

$$f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{10}{50} \cdot 100 = \frac{1.000}{50} = 20$$

$$f_2\% = \frac{v_2}{v} \cdot 100 = \frac{15}{50} \cdot 100 = \frac{1.500}{50} = 30$$

$$f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = \frac{11}{50} \cdot 100 = \frac{1.100}{50} = 22$$

$$f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = \frac{8}{50} \cdot 100 = \frac{800}{50} = 16$$

$$f_5\% = \frac{v_5}{v} \cdot 100 = \frac{6}{50} \cdot 100 = \frac{600}{50} = 12$$

$$N_2 = N_1 + v_1 = 10 + 15 = 25$$

$$N_3 = N_2 + v_3 = 25 + 11 = 36$$

$$N_4 = N_3 + v_4 = 36 + 8 = 44$$

$$N_5 = N_4 + v_5 = 44 + 6 = 50 = v$$

**B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  του δείγματος.

**Απάντηση**

$x_i$	$v_i$	$x_i \cdot v_i$
0	10	0
1	15	15
2	11	22
3	8	24
4	6	24
ΣΥΝΟΛΟ	50	85

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{85}{50} = 1,7$$

**B3.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $\delta$  του δείγματος.

**Απάντηση**

Οι δύο μεσαίες από τις 50 παρατηρήσεις σε αύξουσα, είναι η 25η και η 26η με τιμές 1 και 2 αντίστοιχα.

$$\text{Επομένως, } \delta = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

**B4. α)** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες.

**Απάντηση**

Οι υπάλληλοι που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι οι υπάλληλοι που εργάζονται υπερωριακά 0 ή 1 ή 2 ή 3 ώρες, δηλαδή είναι όλοι οι υπάλληλοι εκτός από όσους εργάζονται υπερωριακά 4 ώρες, άρα το ποσοστό τους είναι ίσο με  $100\% - 12\% = 88\%$ .

**β)** Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, να βρείτε τη νέα μέση τιμή.

**Απάντηση**

1ος τρόπος

$x_i$	$v_i$	$x_i \cdot v_i$
$0 + 4 = 4$	10	0
$1 + 4 = 5$	15	75
$2 + 4 = 6$	11	66
$3 + 4 = 7$	8	56
$4 + 4 = 8$	6	48
ΣΥΝΟΛΟ	50	285

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{285}{50} = 5,7$$

### 2ος τρόπος

Έστω  $y_1 = x_1 + 4, y_2 = x_2 + 4, \dots, y_v = x_v + 4$  οι νέες 50 παρατηρήσεις.

Τότε:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_v}{v} = \frac{(x_1 + 4) + (x_2 + 4) + \dots + (x_v + 4)}{v} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_v + \overbrace{4 + 4 + \dots + 4}^v}{v} = \\ &= \frac{\sum x_i}{v} + \frac{4v}{v} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7\end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

#### Απάντηση

$$f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + \alpha)' = -2(x^3)' + 6(x^2)' + (\alpha)' = 2 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x + 0 = -6x^2 + 12x, x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'(x)	-	○	+	○
f(x)	↘		↗	

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα  $(-\infty, 0]$  και  $[2, +\infty)$  ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, 2]$ .

Γ2. Να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της  $f$  ως συνάρτηση του  $\alpha$  και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , αν το ημίθροισμα των τιμών των ακροτάτων της  $f$  είναι  $-8$ .

#### Απάντηση

$$\text{Τοπικό ελάχιστο: } f(0) = -2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + \alpha = \alpha$$

$$\text{Τοπικό μέγιστο: } f(2) = -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + \alpha = -16 + 24 + \alpha = 8 + \alpha$$

$$\text{Ισχύει ότι: } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{\alpha + \alpha + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -8 - 16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12.$$

Γ3. Για  $\alpha = -12$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$ .

#### Απάντηση

$$f(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 12 = -2 + 6 - 12 = -8$$

$$f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = -6 + 12 = 6$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M(1, f(1))$  είναι  $\lambda = f'(1) = 6$ .

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M(1, f(1))$  είναι:  $y = 6x + \beta$ . Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από το  $M(1, f(1))$  ισχύει:

$$f(1) = 6 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -8 = 6 + \beta \Leftrightarrow -8 - 6 = \beta \Leftrightarrow -14 = \beta$$

Τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:  $y = 6x - 14$ .

**Γ4.** Για  $a = -12$ , να δείξετε ότι  $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$  για κάθε  $x \in [2, +\infty)$ .

### Απάντηση

#### 1ος τρόπος

$$\begin{aligned} x \geq 2 &\stackrel{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -2 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 12 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -16 + 24 - 12 \Leftrightarrow \\ &-2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \stackrel{:(-2)}{\Leftrightarrow} x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

#### 2ος τρόπος

Το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  έχει πιθανές ακέραιες ρίζες:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ .

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 = -1 - 3 + 4 = 0, \text{ άρα το } x + 1 \text{ είναι παράγοντας του } P(x).$$

Κάνουμε σχήμα Horner με  $\rho = -1$ :

1	-3	0	4	-1
	-1	4	-4	
1	-4	4	0	

Άρα  $P(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 4) = (x+1)(x-2)^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in [2, +\infty)$  διότι

$$x \geq 2 \Leftrightarrow x+1 \geq 3 \Rightarrow x+1 > 0 \text{ και } (x-2)^2 \geq 0.$$

### **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$  με  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lambda$  σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Δ1.** Αν ισχύει  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$ , να βρεθεί ο αριθμός  $\lambda$ .

### Απάντηση

Ισχύει ότι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$

$$f'(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{3}(x^3)' + \lambda(x^2)' + 7(x)' + \left( \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \lambda \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$\text{Άρα } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

Δ2. Για  $\lambda = -4$ , να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία.

### Απάντηση

Για  $\lambda = -4$  είναι  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$  και  $f'(x) = x^2 - 8x + 7$ .

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
f'(x)	+	○	○	+
f(x)	↗		↘	

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, 1]$ ,  $[7, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, 7]$ .

Δ3. Για  $\lambda = -4$ , να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης  $A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$ .

### Απάντηση

Ισχύει ότι  $1 < \frac{3}{2} < \frac{5}{2} < 7$  και ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, 7]$ , άρα:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

Επιπλέον ισχύει ότι  $2025 > 2020 > 7$  και ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[7, +\infty)$ , άρα:

$$2025 > 2020 \Leftrightarrow f(2025) > f(2020) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

Συνεπώς η παράσταση  $A$  είναι θετική ως πηλίκο θετικών παραστάσεων.

Δ4. Για  $\lambda = -4$ , να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$ .

### Απάντηση

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7 \Rightarrow f''(x) = (x^2)' - 8(x)' + (7)' = 2x - 8 \cdot 1 + 0 = 2x - 8$$

$$f'(x) - f''(x) + 1 = x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1 = x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1 = x^2 - 10x + 16$$

Για το τριώνυμο  $x^2 - 10x + 16$  ισχύει:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 100 - 64 = 36 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } x^2 - 10x + 16 = (x - 8)(x - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{3}^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-8)(\cancel{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\cancel{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = (2-8)(\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$