

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Απάντηση

Για $h \neq 0$ ισχύει ότι: $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = \cancel{x} + h - \cancel{x} = h$.

$$\text{Άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Συνεπώς $f'(x) = (x)' = 1$.

- A2.** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Απάντηση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο λόγος της μέσης τιμής προς την τυπική απόκλιση καλείται συντελεστής μεταβολής. **Λάθος**

β. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. **Λάθος**

γ. η γραφική παράσταση μίας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι μία συνεχής καμπύλη.

Σωστό

δ. Αν η συνάρτηση της ταχύτητας v ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή ισχύει $a(t) = v'(t)$. **Σωστό**

ε. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα. **Σωστό**

- A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\eta \mu x)' = \dots \sin x \dots$

β. $(\sqrt{x})' = \dots \frac{1}{2\sqrt{x}} \dots$, με $x > 0$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + kx - 6$, $x \in \mathbb{R}$, k πραγματικός αριθμός και $g(x) = 3x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Αν $f'(3) = 7$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό k .

Απάντηση

$$f'(x) = (x^2 + kx - 6)' = (x^2)' + k(x)' - (6)' = 2x + k \cdot 1 - 0 = 2x + k$$

$$f'(3) = 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + k = 7 \Leftrightarrow 6 + k = 7 \Leftrightarrow k = 7 - 6 \Leftrightarrow k = 1$$

$$\text{Για } k = 1: f(x) = x^2 + x - 6 \text{ και } f'(x) = 2x + 1$$

Για $k = 1$:

B2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)}$.

Απάντηση

Αρχικά παραγοντοποιούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 + x - 6$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } f(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x+3} = \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$$

B3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Απάντηση

Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 > 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 3x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x - 2) > 0$$

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
x(x - 2)	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	

Επομένως η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$.

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ και στη συνέχεια να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω εφαπτομένη είναι παράλληλη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Απάντηση

Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda = f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

Οπότε η εξίσωσή της είναι η $y = 3x + \beta$.

Όμως, η εφαπτομένη (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1, f(1))$ άρα ισχύει:

$$f(1) = 3 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow 1^2 + 1 - 6 = 3 + \beta \Leftrightarrow -4 = 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = -7$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι η $y = 3x - 7$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 3x - 6$ είναι ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης ίσο 3, άρα είναι παράλληλη στην (ε) γιατί έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων που αφορά τις τιμές ενός δείγματος μεγέθους n .

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
0		0,10	36°
1	6	0,30	
2		0,25	
3		0,20	
4		0,15	54°
ΣΥΝΟΛΟ		1	360°

όπου α_i το τόξο του κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στην τιμή x_i
όπου $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 20$.

Απάντηση

$$f_2 = \frac{v_2}{n} \Leftrightarrow 0,3 = \frac{6}{n} \Leftrightarrow n = \frac{6}{0,3} \Leftrightarrow n = 20$$

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Απάντηση

$$f_1 = \frac{v_1}{n} \Leftrightarrow v_1 = f_1 \cdot n \Leftrightarrow v_1 = 0,10 \cdot 20 \Leftrightarrow v_1 = 2, \quad f_3 = \frac{v_3}{n} \Leftrightarrow v_3 = f_3 \cdot n \Leftrightarrow v_3 = 0,25 \cdot 20 \Leftrightarrow v_3 = 5$$

$$f_4 = \frac{v_4}{n} \Leftrightarrow v_4 = f_4 \cdot n \Leftrightarrow v_4 = 0,20 \cdot 20 \Leftrightarrow v_4 = 4, \quad f_5 = \frac{v_5}{n} \Leftrightarrow v_5 = f_5 \cdot n \Leftrightarrow v_5 = 0,15 \cdot 20 \Leftrightarrow v_5 = 3$$

$$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^\circ = 0,30 \cdot 360^\circ = 108^\circ, \quad \alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ = 0,25 \cdot 360^\circ = 90^\circ, \quad \alpha_4 = f_4 \cdot 360^\circ = 0,20 \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
0	2	0,10	36°
1	6	0,30	108°
2	5	0,25	90°
3	4	0,20	72°
4	3	0,15	54°
ΣΥΝΟΛΟ	20	1	360°

Γ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Απάντηση

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{40}{20} = 2$
0	2	2	
1	6	6	
2	5	10	
3	4	12	
4	3	12	
ΣΥΝΟΛΟ	20	40	

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

Απάντηση

x_i	v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0	2	-2	4	8
1	6	-1	1	6
2	5	0	0	0
3	4	1	1	4
4	3	2	4	12
ΣΥΝΟΛΟ	20			30

$$s^2 = \frac{\sum v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{30}{20} = 1,5$$

- Γ5.** Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Δίνεται $\sqrt{5} \approx 1,22$.

Απάντηση

Τυπική απόκλιση: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,5} \approx 1,22$

συντελεστής μεταβολής: $CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{1,22}{2} \cdot 100\% = 61\%$

Επειδή $CV > 10\%$, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + x^2 - x = 3x^2 + 3(1-2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

και $f(1) = 1$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x^2 - 5x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Επειδή $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$f'(x) + x^2 - x = 3x^2 + 3 - 6x \Leftrightarrow f'(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

- Δ2.** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Απάντηση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+	○	○	+
f(x)				

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Δ3. Να αιτιολογήσετε ότι $f'(197) < f'(314)$.

Απάντηση

$$f''(x) = (2x^2 - 5x + 3)' = 2(x^2)' - 5(x)' + (3)' = 2 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 4x - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow 4x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα } \left[\frac{5}{4}, +\infty\right).$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow 4x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}, \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } \left(-\infty, \frac{5}{4}\right).$$

$$\frac{5}{4} < 197 < 314 \stackrel{f': \uparrow}{\Rightarrow} f'(197) < f'(314)$$

Δ4. Να υπολογιστεί το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{\sqrt{1+h} - 1}$.

Απάντηση

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{\sqrt{1+h} - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{(\sqrt{1+h} - 1) \cdot (\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{\sqrt{1+h}^2 - 1^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(1+h) - f(1)] \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{1+h} + 1) = f'(1) \cdot (\sqrt{1+0} + 1) = 0 \cdot 2 = 2$$