ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \le \nu$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, ..., \kappa$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$$

<u>Απάντηση</u>

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1$$

Α2. Να διατυπώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

<u>Απάντηση</u>

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α και Β το σύνολο των στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου της f;

<u>Απάντηση</u>

Έστω Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Η συνάρτηση αυτή λέγεται πρώτη παράγωγος της f και συμβολίζεται με f'.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το εύρος θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς. **Λάθος**

β. Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) μέγιστο στη θέση $x = x_0$. **Σωστό**

γ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής. **Σωστό**

δ. Αν $g(x) \neq 0$ τότε $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$. **Λάθος**

ε. Σε ένα οριζόντιο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος. **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

__Απάντηση__

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'-\left(x^2\right)'-3(x)'+(1)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2x-3\cdot 1+0=x^2-2x-3$$

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

__Απάντηση__

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3\\ \frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1\end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,3]$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το

$$f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-(-1)^2-3\cdot(-1)+1=\frac{1}{3}\cdot(-1)\cancel{-1}+3+\cancel{1}=-\frac{1}{3}+3=-\frac{1}{3}+\frac{9}{3}=\frac{8}{3}$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 3 το

$$f(3)=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3+1=\frac{1}{3}\cdot 27-9-9+1=\frac{27}{3}\underbrace{-18+1}=9-17=-8$$

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$.

__Απάντηση__

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι $\lambda=f'(0)=0^2-2\cdot 0-3=-3$.

Επομένως η εξίσωση της της εφαπτομένης είναι: $y=\lambda x+\beta$ ή $y=-3x+\beta$.

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0,f(0))$ και επειδή $f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-0^2-3\cdot 0+1=1$ ισχύει ότι:

$$y=-3x+\beta\Rightarrow f(0)=-3\cdot 0+\beta\Leftrightarrow 1=\beta$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=-3x+1$.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f'(x)}{x+1}$.

<u>Απάντηση</u>

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x-3)=-1-3=-4$$

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν επτά μαθητές στις θερινές διακοπές είναι αντίστοιχα:

4, 5, 4, κ, 0, 3, 7   όπου κ φυσικός αριθμός

Γ1. Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές είναι $\bar{x}=4$, να βρείτε τον κ.

<u>Απάντηση</u>

Για κ = 5:

Γ2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

<u>Απάντηση</u>

$$\bar{x}=\frac{\sum t_i}{\nu}\Rightarrow 4=\frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7}\Leftrightarrow 4=\frac{\kappa+23}{7}\Leftrightarrow \kappa+23=28\Leftrightarrow \kappa=28-23\Leftrightarrow \kappa=5$$

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

<u>Απάντηση</u>

$$s^2=\frac{\sum(t_i-\bar{x})^2}{\nu}=\frac{(0-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{7}=$$

$$=\frac{(-4)^2+(-1)^2+0^2+0^2+1^2+1^2+3^2}{7}=\frac{16+1+1+1+9}{7}=\frac{28}{7}=4$$

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

<u>Απάντηση</u>

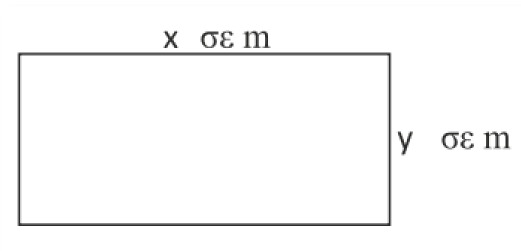
Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$.

$CV=\dfrac{s}{\bar{x}}\cdot 100\%=\dfrac{2}{4}\cdot 100\%=50\%$.

Είναι CV > 10%, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εμβαδού 100 m^2.



Δ1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x)=2x+\frac{200}{x},\quad x>0$$

Απάντηση

Εμβαδόν ορθογωνίου: $E=100 \Leftrightarrow x\cdot y=100 \Leftrightarrow y=\dfrac{100}{x}$ (1).

Περίμετρος ορθογωνίου: $\Pi=2x+2y \overset{(1)}{\Rightarrow} \Pi(x)=2x+2\cdot\dfrac{100}{x} \Leftrightarrow \Pi(x)=2x+\dfrac{200}{x}$, $x>0$.

Δ2. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $\Pi(x)$ και να αποδείξετε ότι το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο.

Απάντηση

$$\Pi'(x)=\left(2x+\frac{200}{x}\right)'=2(x)'+200\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=2\cdot 1+200\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2-\frac{200}{x^2}=\frac{2x^2-200}{x^2},\quad x>0$$

$$\Pi'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-200=0 \Leftrightarrow 2x^2=200 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x^2=100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{100} \Leftrightarrow x=10$$

$$\Pi'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2}>0 \Leftrightarrow 2x^2-200>0 \Leftrightarrow 2x^2>200 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x^2>100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x>\sqrt{100} \Leftrightarrow x>10$$

$$\Pi'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-200}{x^2}<0 \Leftrightarrow 2x^2-200<0 \Leftrightarrow 2x^2<200 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x^2<100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<\sqrt{100} \Leftrightarrow x<10$$

Άρα, η $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10,+\infty)$.

Η περίμετρος Π γίνεται ελάχιστη για $x=10$. Τότε $y=\dfrac{100}{x}=\dfrac{100}{10}=10$, δηλαδή όλες οι πλευρές είναι ίσες με 10 m οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι τιμές της πλευράς του παραπάνω ορθογωνίου με $x_1, x_2 \in (0,10)$ και $x_1<x_2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A=\frac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1-x_2}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

Στο διάστημα $(0,10)$ η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα ισχύει:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \Pi(x_1)>\Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1)-\Pi(x_2)>0$$

Επιπλέον ισχύει ότι: $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1-x_2<0$.

Συνεπώς: $A=\dfrac{\Pi(x_1)-\Pi(x_2)}{x_1-x_2}<0$ καθώς ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ετερόσημοι.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}$.

Απάντηση

$$\lim_{x\to10}\frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-10}=\lim_{x\to10}\frac{\frac{2x^2-200}{x^2}}{\sqrt{10x}-10}=\lim_{x\to10}\frac{2x^2-200}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)}=\lim_{x\to10}\frac{2\left(x^2-100\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)}=$$

$$\lim_{x\to10}\frac{2(x+10)(x-10)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)}=\lim_{x\to10}\frac{2(x+10)(x-10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)}=\lim_{x\to10}\frac{2(x+10)(x-10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left[\left(\sqrt{10x}\right)^2-10^2\right]}=$$

$$\lim_{x\to10}\frac{2(x+10)(x-10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2(10x-100)}=\lim_{x\to10}\frac{2(x+10)\cancel{(x-10)}\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2\cancel{(x-10)}}=$$

$$\lim_{x\to10}\frac{2(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2}=\lim_{x\to10}\frac{(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{5x^2}=\frac{(10+10)\left(\sqrt{10\cdot10}+10\right)}{5\cdot10^2}=$$

$$=\frac{20\cdot\left(\sqrt{100}+10\right)}{5\cdot100}=\frac{20\cdot(10+10)}{500}=\frac{20\cdot20}{500}=\frac{400}{500}=\frac{4}{5}$$