

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σύνολο A και c πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $F(x) = c \cdot f(x)$.

$$\text{Για } h \neq 0: \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} = c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = c \cdot f'(x).$$

$$\text{Συνεπώς } (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

A2. Να διατυπώσετε τον ορισμό του εύρους (R) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Απάντηση

Εύρος (R) ενός συνόλου παρατηρήσεων ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο των ποσοτικών μεταβλητών.

Λάθος

β. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.

Σωστό

γ. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

Σωστό

δ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$, όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 + \ell_2$$

Λάθος

- ε. Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

$$v(t_0) = f'(t_0)$$

Σωστό

- A4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

β. $(\sin x)' = -\eta \mu x$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$ και α σταθερός πραγματικός αριθμός.

- B1.** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ να βρεθεί η τιμή του α .

Απάντηση

Το σημείο $A(1,0)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , άρα ισχύει ότι:

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 + \alpha \cdot 1^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

Άρα, για $\alpha = -2$ προκύπτει ότι: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Για $\alpha = -2$:

- B2.** Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2x + 1) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

- B3.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $O(0,0)$.

Απάντηση

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)' = (x^3)' - 2 \cdot (x^2)' + (x)' = 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 3x^2 - 4x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης είναι: $\lambda = f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1$.

Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, άρα ισχύει: $y = \lambda x + \beta \Rightarrow 0 = 1 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y = 1 \cdot x + 0$, δηλαδή η $y = x$.

- B4.** Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απάντηση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
f'(x)	+	○	○	+
f(x)				

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ και $[1, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $\frac{1}{3}$ το

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - 2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{27} - \frac{6}{27} + \frac{9}{27} = \frac{4}{27}$$

και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα μηνιαία ατομικά έξοδα σε ευρώ (€) 40 φοιτητών. Τα δεδομένα ομαδοποιήθηκαν σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.

Κλάσεις εξόδων	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	$x_i v_i$
[300,400)	350	...	0,2	...
[...,...)	450	16	...	7.200
[...,...)	550	...	...	6.600
[600,700)	650	...	0,1	...
Σύνολο		40	...	19.200

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε σωστά τα κενά.

Απάντηση

Κλάσεις εξόδων	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	$x_i v_i$
[300,400)	350	8	0,2	2.800

[400,500)	450	16	0,4	7.200
[500,600)	550	12	0,3	6.600
[600,700)	650	4	0,1	2.600
Σύνολο		40	1	19.200

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μηνιαίων ατομικών εξόδων των φοιτητών.

Απάντηση

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{v} = \frac{19.200}{40} = 480 \text{ ευρώ}$$

Γ3. Πόσοι φοιτητές ξοδεύουν τουλάχιστον 550 ευρώ (€) μηνιαίως και ποιο είναι το ποσοστό των φοιτητών αυτών;

Απάντηση

Έστω ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις.

Τουλάχιστον 550 ευρώ σημαίνει από 550 ευρώ και πάνω, άρα οι φοιτητές που ξοδεύουν τουλάχιστον 550 ευρώ και πάνω είναι όσοι βρίσκονται στα διαστήματα [550,600) και [600,700). Επειδή το 550 είναι το κέντρο της κλάσης [500,600), στο διάστημα [550,600) βρίσκονται οι μισοί φοιτητές του διαστήματος [500,600), δηλαδή $12 : 2 = 6$ φοιτητές, ενώ στο διάστημα [600,700) βρίσκονται 4 φοιτητές, οπότε στο διάστημα [550,700) βρίσκονται τελικά $6 + 4 = 10$ φοιτητές και το ποσοστό τους είναι $\frac{10}{40} = 0,25$ ή 25%.

Συνεπώς το 25% των φοιτητών ξοδεύει τουλάχιστον 550 ευρώ μηνιαίως.

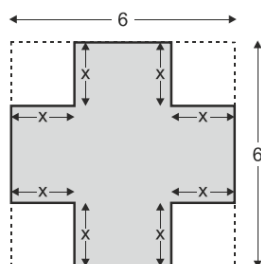
Γ4. Αν κάθε φοιτητής αυξήσει τα έξοδά του κατά 50 ευρώ (€), ποια θα είναι η νέα μέση τιμή των εξόδων τους;

Απάντηση

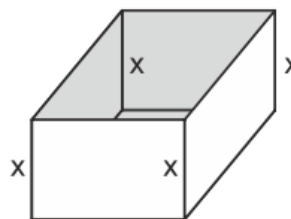
$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{\sum t'_i}{v} = \frac{t'_1 + t'_2 + \dots + t'_{40}}{40} = \frac{t_1 + 50 + t_2 + 50 + \dots + t_{40} + 50}{40} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{40} + 40 \cdot 50}{40} = \\ &= \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{40} + 40 \cdot 50}{40} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{40}}{40} + \frac{40 \cdot 50}{40} = \bar{x} + 50 = 480 + 50 = 530 \text{ ευρώ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Διαθέτουμε ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 m. Κόβουμε από κάθε γωνία του ένα τετράγωνο πλευράς x m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Στη συνέχεια διπλώνουμε προς τα επάνω τις πλευρές. Έτσι, προκύπτει μία δεξαμενή ανοικτή από πάνω, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 1



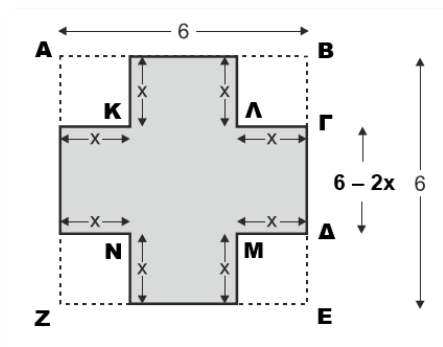
Σχήμα 2

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η πλευρά της τετραγωνικής βάσης της δεξαμενής είναι $(6 - 2x)$ m. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της τετραγωνικής βάσης δίνεται από τον τύπο $E(x) = 4x^2 - 24x + 36$ και να δικαιολογήσετε ότι $0 < x < 3$.

Απάντηση

Η πλευρά ΛΜ της τετραγωνικής βάσης ΚΛΜΝ είναι ίση με:

$$\Lambda\text{M} = \Gamma\Delta = \text{BE} - \text{B}\Gamma - \Delta\text{E} = 6 - x - x = 6 - 2x$$



Το εμβαδόν της τετραγωνικής βάσης ΚΛΜΝ είναι ίσο με

$$\Lambda\text{M}^2 = (6 - 2x)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2x + (2x)^2 = 36 - 24x + 4x^2 = 4x^2 - 24x + 36$$

Επομένως: $E(x) = 4x^2 - 24x + 36$, $0 < x < 3$.

- Δ2.** Ο όγκος V ενός ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης επί το αντίστοιχο ύψος. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής δίνεται από τον τύπο:

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \quad 0 < x < 3$$

Απάντηση

$$V(x) = E(x) \cdot x = (4x^2 - 24x + 36) \cdot x = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \quad 0 < x < 3$$

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του Σχήματος 1 είναι $A(x) = 36 - 4 \cdot x^2$.

Απάντηση

Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΕΖ αφαιρέσουμε τα εμβαδά των 4 τετραγώνων πλευράς x , οπότε: $A(x) = 6^2 - 4 \cdot x^2 = 36 - 4x^2$.

- Δ4.** α. Να βρεθούν οι διαστάσεις της δεξαμενής ώστε να έχει τον μέγιστο όγκο.
β. Ποιο είναι το κόστος της εσωτερικής βαφής της δεξαμενής μέγιστου όγκου, αν η βαφή κοστίζει 12 €/m²;

Απάντηση

$$\begin{aligned} \alpha. \quad V'(x) &= (4x^3 - 24x^2 + 36x)' = 4 \cdot (x^3)' - 24 \cdot (x^2)' + 36 \cdot x = 4 \cdot 3x^2 - 24 \cdot 2x + 36 \cdot 1 = \\ &= 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3) \end{aligned}$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 & (\text{απορρίπτεται διότι } 0 < x < 3) \\ \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 & (\text{δεκτή}) \end{cases}$$

Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ είναι αρνητικό στο διάστημα $[1,3)$, άρα $V'(x) < 0$ στο διάστημα $[1,3)$, οπότε η συνάρτηση $V(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,3)$.

Επιπλέον, το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ είναι θετικό στο διάστημα $(0,1]$, άρα $V'(x) > 0$ στο διάστημα $(0,1]$, οπότε η συνάρτηση $V(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$.

Συνεπώς, η συνάρτηση $V(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο 1, οπότε η πλευρά ΚΛ της τετραγωνικής βάσης ΚΛΜΝ είναι ίση με $6 - 2x = 6 - 2 \cdot 1 = 6 - 2 = 4$ m, άρα οι διαστάσεις της δεξαμενής είναι 4 m, 4m και 1 m.

β. Για $x = 1$, το εμβαδόν της επιφάνειας που θα βαφτεί είναι ίσο με $A(1) = 36 - 4 \cdot 1^2 = 36 - 4 = 32$ m².

Επομένως, θα χρειαστούν $32 \cdot 12 = 384$ € για να βαφτεί η δεξαμενή.