Θέματα
Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού στα Μαθηματικά «Ο Θαλής»

2006 – 2025

Γ΄ Λυκείου

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (www.hms.gr)

Περιεχόμενα

Τα θέματα αντλούνται από την ιστοσελίδα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας
(www.hms.gr)

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f\big(f(x+y)\big)=x-f(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)+f(-x)$ είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης: $3^{x+1}-x\cdot 3^x-4x-1=0$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 και $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{|z_1|^2}{\text{συν}^2\theta}+\frac{|z_2|^2}{\text{ημ}^2\theta}\geq|z_1|^2+|z_2|^2+2\text{Re}\left(\overline{z}_1 z_2\right)$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ προς το ίδιο μέρος της ευθείας ΒΓ.

Αν $\text{B}\hat{\text{K}}\Gamma=\text{B}\hat{\Lambda}\Gamma=\text{B}\hat{\text{M}}\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι δύο τουλάχιστον από τα γινόμενα $\text{KB}\cdot\text{K}\Gamma$, $\Lambda\text{B}\cdot\Lambda\Gamma$ και $\text{MB}\cdot\text{M}\Gamma$ είναι άνισα.

ΘΕΜΑ 1ο

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=30^{o}$. Στα σημεία Α και Γ θεωρούμε τις εφαπτόμενες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνονται στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ συναρτήσει της πλευράς ΒΓ = α του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να προσδιορισθούν οι παράμετροι $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε ο αριθμός 2 να είναι ρίζα των εξισώσεων:

$$\lambda x^{3}-(\mu+4)x-2=0 \quad \text{και} \quad \mu x^{2}-4x-\lambda-2=0$$

β) Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\lambda x^{3}-(\mu+4)x-2}{\mu x^{2}-4x-\lambda-2}=\frac{17}{8}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f\big(f(x)-f(y)\big)=f\big(f(x)\big)-y \quad \text{για κάθε} \quad x,y\in\mathbb{R}\ ,$$

τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

ΘΕΜΑ 4ο

Για κάθε τρεις μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, b και c, που είναι διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{\alpha+b}{\alpha-b}\right)^{2}+\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^{2}+\left(\frac{c+\alpha}{c-\alpha}\right)^{2}\geq 2$$

Θέματα 69ου Πανελλήνιου Μαθητικού Διαγωνισμού στα Μαθηματικά «Ο Θαλής» (2008)

ΘΕΜΑ 1ο

Αν οι θετικοί ακέραιοι α και β έχουν 120 κοινούς θετικούς διαιρέτες, να προσδιορίσετε το πλήθος των κοινών θετικών διαιρετών των αριθμών

$$A = 4\alpha + 5\beta \quad \text{και} \quad B = 3\alpha + 4\beta$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να προσδιορίσετε το πλήθος και το άθροισμα των άρτιων θετικών ακεραίων που βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $A = n^2 - n + 1$ και $B = n^2 + n + 1$, όπου n θετικός ακέραιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Να προσδιορίσετε τις τριάδες ακεραίων (x,y,z) με $x \geq y \geq z$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x) = 6$$

Ποιες από τις τριάδες αυτές έχουν άθροισμα τετραγώνων ελάχιστο;

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Θεωρούμε τυχόν σημείο Μ εκτός του ΑΒ και τέτοιο ώστε η κάθετη από αυτό προς την ευθεία ΑΒ να την τέμνει σε εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέτοια ώστε

$$A\Gamma \perp AM \quad \text{και} \quad A\Gamma = 2 \cdot AM, \quad B\Delta \perp MB \quad \text{και} \quad B\Delta = 2 \cdot MB$$

και επιπλέον τα σημεία Μ, Γ και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι το μέσον Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ είναι σταθερό σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου Μ.

ΘΕΜΑ 1ο

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y που να επαληθεύουν την εξίσωση:

$$2x^2 + 3x(x-2) + 11x - 10y = 2015$$

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f(x - f(y)) - f(y - f(x)) = 2f(f(x) - f(y))$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x - f(x)) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί με δεκαδική αναπαράσταση της μορφής $\overline{\alpha\underbrace{000...000}_{2\nu \text{ ψηφία}}\alpha}$, όπου α είναι θετικός μονοψήφιος ακέραιος και μεταξύ του πρώτου και του τελευταίου ψηφίου του αριθμού $\overline{\alpha 000...000\alpha}$, μεσολαβούν 2ν το πλήθος μηδενικά.

Να αποδείξετε ότι:

«ή ένας από αυτούς θα διαιρείται με το 33 ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το 33».

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O,R) και έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, Θεωρούμε τους κύκλους $C_1\left(A_1, \frac{R}{2}\right)$, $C_2\left(B_1, \frac{R}{2}\right)$ και $C_3\left(\Gamma_1, \frac{R}{2}\right)$.

Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1, C_2, C_3 περνάνε από το ίδιο σημείο (έστω Ν) και ότι τα δεύτερα κοινά σημεία τους είναι τα μέσα A_2, B_2, Γ_2 των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι οι A_1A_2, B_1B_2, $\Gamma_1\Gamma_2$ kai ΟΝ περνάνε από το ίδιο σημείο.

ΘΕΜΑ 1ο

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση

$$\left(2x^2+3x+1\right)^3-\left(x^2+3x+2\right)^3=7\left(x^2-1\right)^3$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Το ύψος του ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο Ζ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΔΖ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Αν η ευθεία ΕΔ τέμνει την ευθεία ΑΓ στο Κ και η ευθεία ΖΚ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΛ.

ΘΕΜΑ 3ο

Σε τουρνουά τένις συμμετέχουν 2^m, όπου m θετικός ακέραιος, αθλητές οι οποίοι έχουν βαθμολογηθεί και καταταγεί ανάλογα με την γενικότερη επίδοση τους. Το τουρνουά διεξάγεται σε «γύρους». Στον πρώτο «γύρο» ο πρώτος αθλητής αγωνίζεται με τον τελευταίο αθλητή, ο δεύτερος αγωνίζεται με τον προτελευταίο και η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να αγωνιστούν όλοι οι αθλητές. Οι νικητές του πρώτου «γύρου» κατατάσσονται ξανά και συμμετέχουν στον δεύτερο «γύρο» ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία με αυτή του πρώτου «γύρου». Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να ανακηρυχτεί ο πρωταθλητής. Σε κάθε νικητή του πρώτου γύρου δίνονται 10 βαθμοί, σε κάθε νικητή του δεύτερου γύρου δίνονται 20 βαθμοί, σε κάθε νικητή του τρίτου γύρου δίνονται 30 βαθμοί κ.ο.κ.

α) Αν ο θετικός ακέραιος m είναι πολλαπλάσιο του 3, να αποδείξετε ότι το συνολικό πλήθος των αγώνων είναι πολλαπλάσιο του 7.

β) Αν ο πρωταθλητής συγκέντρωσε συνολικά 210 βαθμούς, να βρείτε τον αριθμό των αθλητών που συμμετείχαν.

ΘΕΜΑ 4ο

Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων $c_1(O_1,r_1)$ και $c_2(O_2,r_2)$ στα διακεκριμένα σημεία Α και Β, αντιστοίχως. Αν το Μ είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων $c_1(O_1,r_1)$, $c_2(O_2,r_2)$ και ισχύει ότι $r_1 < r_2$, να αποδείξετε ότι $MA < MB$.

ΘΕΜΑ 1ο

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς η εξίσωση:

$$\left(x^2+3x+2\right)^4+\left(x^2+x-2\right)^4=16\left(x+2\right)^4$$

ΘΕΜΑ 2ο

Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$, αν το σύστημα

$$\left\{\alpha\left(x^2+y^2\right)+2x+y=\lambda,\ 2x-y=-\lambda\right\}\quad(\Sigma)$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Η ακολουθία α_n, $n=0,1,2,...$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία $d_n=\alpha_n-\alpha_{n-1}$, με $n=1,2,3...$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega=\alpha_1-\alpha_0$.

1. Να προσδιορίσετε, συναρτήσει των α_0, ω και n τον γενικό όρο α_n και το άθροισμα
$$S_{n+1}=\alpha_0+\alpha_1+...+\alpha_n$$
2. Αν είναι $\alpha_0=1$ και $\alpha_1=7$, να προσδιορίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n για τον οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις $\alpha_n>10^3$ και $S_{n+1}\le 8\cdot 10^3$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (c) και Δ τυχόν σημείο της πλευράς ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Σ, τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο Κ και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Μ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, τέμνει τον κύκλο (c) στο σημείο Τ, τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ στο σημείο Λ και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{\Delta}B$ στο σημείο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Α, Ι, Λ, Μ και Α, Ι, Κ, Ν, όπου Ι το έκκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, είναι ομοκυκλικά σε δύο διαφορετικούς κύκλους, έστω (c_1) και (c_2), αντίστοιχα.

β) Αν η ΑΔ ταυτιστεί με το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην κορυφή Α, τότε οι κύκλοι (c_1) και (c_2) είναι ίσοι μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ 1ο

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους την εξίσωση

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+4+\ldots+x}=\frac{2011}{2013}$$

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x^2+bx+c$ και $g(x)=cx+b$, όπου $\alpha,b,c\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, διαφορετικοί μεταξύ τους ανά δύο, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, να βρείτε τη συνθήκη που ισχύει μεταξύ των παραμέτρων α, b, c καθώς και το κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΘΕΜΑ 3ο

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z για τους οποίους ισχύει ότι

$$\frac{x}{2012x+y}=\frac{y}{2012y+z}=\frac{z}{2012z+7}$$

και το άθροισμα των τετραγώνων των x, y και z ισούται με 147.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος c(O,R), τυχούσα χορδή του BC (όχι διάμετρος) και τυχόν σημείο M του μικρού τόξου BC. Οι κύκλοι c_1(B,BM), c_2(C,CM) τέμνουν τον κύκλο c(O,R) στα σημεία K, N, αντίστοιχα, και οι κύκλοι c_1(B,BM), c_2(C,CM) τέμνονται στα σημεία A και M. Η παράλληλος από το σημείο M προς την BC τέμνει τους κύκλους c_1(B,BM), c_2(C,CM) στα σημεία T, S, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες AM, KT, NS περνάνε από το ίδιο σημείο.

ΘΕΜΑ 1ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 2x\sqrt{x^2 - 5x} = 1$$

ΘΕΜΑ 2ο

Αν α, β ακέραιοι και ο αριθμός $A = \alpha^2 + 2\beta$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = \alpha^2 + \beta$ ισούται με το άθροισμα δύο τέλειων τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

ΘΕΜΑ 3ο

Βρείτε για ποιες τιμές της πραγματικής παραμέτρου α η εξίσωση

$$4x^4 + (8 + 4\alpha)x^3 + (\alpha^2 + 8\alpha + 4)x^2 + (\alpha^3 + 8)x + \alpha^2 = 0$$

έχει όλες τις ρίζες της πραγματικούς αριθμούς.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O,R) (με κέντρο O και ακτίνα R) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ. Ο κύκλος C_B(Β,ΑΒ) (με κέντρο Β και ακτίνα ΑΒ), τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο Κ και τον κύκλο C(O,R) στο σημείο Λ. Ο κύκλος C_Γ(Γ,ΑΓ) (με κέντρο Γ και ακτίνα ΑΓ), τέμνει την (ε) στο σημείο Ν και τον κύκλο C(O,R) στο σημείο Μ. Οι κύκλοι C_B(Β,ΑΒ), C_Γ(Γ,ΑΓ) τέμνονται στο σημείο Τ και η ευθεία (ε) τέμνει τον C(O,R) στο σημείο Σ.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Λ, Ν, Τ είναι συνευθειακά.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΤΑ, ΚΓ, ΝΒ περνάνε από το ίδιο σημείο.

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - (3\alpha - 5)x + 186$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η παραβολή τέμνει τον άξονα των x σε δύο σημεία διαφορετικά μεταξύ τους με ακέραιες συντεταγμένες.

ΘΕΜΑ 2ο

Να λυθεί στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{matrix}\right\}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο C(O,R). Η διχοτόμος ΒΔ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο C(O,R) στο σημείο Ζ. Έστω Ε τυχόν σημείο του τμήματος ΔΓ. Η ευθεία ΒΕ τέμνει τον κύκλο C(O,R) στο σημείο Η. Οι ευθείες ΑΓ και ΖΗ τέμνονται στο σημείο Θ. Επίσης, η ευθεία ΖΕ τέμνει τον κύκλο C(O,R) στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα ΒΔΗΘ, ΒΔΕΚ και ΔΖΘΚ είναι εγγράψιμα.

ΘΕΜΑ 4ο

Να βρείτε όλους τους φυσικούς αριθμούς n, που έχουν ακριβώς τέσσερις θετικούς διαιρέτες $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ και ικανοποιούν τη σχέση:

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 640$$

ΘΕΜΑ 1ο

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$.

Μια ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $A\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$, $B\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$

ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.

ΘΕΜΑ 2ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση:

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x, y που ικανοποιούν την εξίσωση $x^3+y^3-x-y=pq$, όπου p, q πρώτοι αριθμοί.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με AB < AC < BC) εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R) και έστω D, E τα μέσα των AB και AC αντίστοιχα. Έστω T τυχόν σημείο του μικρού τόξου BC και (c_1), (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDT και CET αντίστοιχα. Οι κύκλοι (c_1) και (c_2) τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο DELK είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 1ο

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε την παραβολή με εξίσωση $y=x^2$ και τα σημεία της Α, Β και Γ με τετμημένες α, β και γ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\omega>0$.

Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του ω.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A}=45^{o}$. Στο ύψος ΑΔ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΔΒ = ΔΓ = ΔΚ. Οι προεκτάσεις των υψών ΒΕ και ΓΖ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ν, Κ και Μ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, τέτοιο ώστε:

- $P(1)=1$, $P(2)=4$, $P(3)=9$, $P(4)=16$,
- Όλοι οι συντελεστές του $P(x)$ είναι μικρότεροι ή ίσοι του 10.

Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του $P(5)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Να βρείτε έναν πρώτο αριθμό που διαιρεί τον αριθμό $A=14^7+14^2+1$.

ΘΕΜΑ 1ο

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f(\alpha)=0 \quad \text{και} \quad f\big(f(x)\big)=xf(x)+\alpha, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του α και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

ΘΕΜΑ 2ο

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$x^7+x^6+x^5+1=0$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) με $\hat{A}=36^{\circ}$. Ο κύκλος C_1(Γ,ΓΑ) (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η ΔΓ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

ΘΕΜΑ 4ο

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $9^{8^{8^{9}}}$ και $8^{9^{9^{8}}}$.

ΘΕΜΑ 1ο

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $A = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0$, να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

ΘΕΜΑ 3ο

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y^2 = 3z^3$$

$$y + 2z^2 = 3x^3$$

$$z + 2x^2 = 3y^3$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (με ΑΒ || ΓΔ και ΑΒ < ΓΔ) εγγεγραμμένο σε κύκλο c(O,R). Η εφαπτομένη στο Β του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία ΔΓ στο σημείο Ε. Έστω Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία ΑΔ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου ΔΒΕ.

β) Το σημείο Μ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου ΟΒΓ.

γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΔΒΕ και ΟΒΓ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο Β.

ΘΕΜΑ 1ο

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης:

$$108(x-2)^4+(4-x^2)^3=0$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΒ και σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε οι ευθείες ΔΕ και ΑΓ να είναι παράλληλες. Στην προέκταση της ΔΕ προς το μέρος του Ε παίρνουμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΕΖ = ΑΔ. Αν Ο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΒΕ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Ζ, Α και Δ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

ΘΕΜΑ 3ο

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{aligned} xy^3&=-108 \\ (x+y)y&=-3\end{aligned}\right\}$.

ΘΕΜΑ 4ο

Με κ διαφορετικά χρώματα θέλουμε να χρωματίσουμε τους αριθμούς 2, 3, ..., 1024 έτσι ώστε κανένας αριθμός να μην έχει το ίδιο χρώμα με οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του.
Να βρείτε την ελάχιστη δυνατή τιμή του κ.

ΘΕΜΑ 1ο

Να βρεθούν οι περιττοί πρώτοι αριθμοί p για τους οποίους ο ακέραιος 3p – 8 ισούται με τον κύβο θετικού ακέραιου.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x,y,z) που είναι λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l} x^3+8y-4z=-3 \\ 3x^2+y^2-2z=1 \\ 3x-4y+z^2=68 \end{array}\right\}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο μη ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}=60^\circ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο c = c(O,R). Δίνονται επίσης τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ καθώς και τα μέσα Μ, Ν των πλευρών του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Έστω ακόμη Ζ το σημείο τομής των ΟΑ, ΕΜ και Η το σημείο τομής των ΜΝ, ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Η, Ζ, Μ ανήκουν σε κύκλο, έστω c_1.

β) Αν οι κύκλοι c και c_1 τέμνονται στο σημείο Θ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Η, Θ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 1ο

Να λύσετε στους θετικούς ακέραιους το σύστημα:

$$4\alpha^2 = 6\beta^2 + 5\gamma^2 + 25$$

$$13\alpha = 3\beta + 2\gamma + 34$$

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f\big(2f(x)+y\big)=f\big(f(y)+x\big)+x \quad (*)$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ υπάρχει $z\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(z)=\alpha$ και ότι η f είναι 1 – 1.

β) Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση $(*)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ), εγγεγραμμένο σε κύκλο C με κέντρο O και ακτίνα R. Θεωρούμε τα μέσα Μ, Κ, Λ των πλευρών ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, καθώς και τους κύκλους C_M(Μ,ΜΑ), C_K(Κ,ΚΒ), C_Δ(Λ,ΛΓ) με κέντρα τα σημεία Μ, Κ, Λ και ακτίνες ΜΑ, ΚΒ, ΛΓ αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνουν τον κύκλο C στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Τ, Ρ, Σ είναι οι ορθές προβολές των κορυφών Α, Β, Γ αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ προς τις απέναντι πλευρές του, να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΔΤ, ΕΡ και ΖΣ συντρέχουν.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω α, b αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε α + β = 2.

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = 8\left(\alpha^3+\beta^3\right)-3\left(\alpha^4+\beta^4\right)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ. Έστω Δ σημείο στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ τέτοιο ώστε ΜΔ = ΜΒ και έστω Ε σημείο στη διχοτόμο της γωνίας Γ τέτοιο ώστε ΜΕ = ΜΓ. Έστω Ι το σημείο τομής των διχοτόμων ΒΔ και ΓΕ, έστω Κ το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ, και έστω Ν το σημείο τομής των ευθειών ΑΓ και ΕΔ.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Κ, Ι, Ν είναι ομοκυκλικά.

ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών $f\left(N^*\right) \subseteq N^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(6n+7)=6f(n)+7 \quad \text{και} \quad f(7n-1)=7f(n)-1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}^*$$

Να προσδιορίσετε την τιμή την τιμή $f(2029)$.

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α, b, c, d έτσι, ώστε οι αριθμοί $\frac{\alpha}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$\left(\alpha^3+b^3+c^3+d^3\right)\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\right)$$

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα πολυώνυμο είναι βαθμού 2024 και έχει ακριβώς 4 διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.
Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος μηδενικών συντελεστών που μπορεί να έχει;

ΘΕΜΑ 3ο

Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε ο αριθμός

$$A=2023\cdot 10^n+5$$

να ισούται με το τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ < ΑΓ και $\hat{A}=60^\circ$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ΑΒΓ, Ο είναι το περίκεντρό του, και Ε είναι το μέσο του τόξου ΑΒ του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ που δεν περιέχει το σημείο Γ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΙ είναι κάθετη στη χορδή ΒΕ.

ΘΕΜΑ 1ο

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$|\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma|=|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+1|$$

να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2 \quad \text{και} \quad B=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+1$$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$f(xy)=xf(y)+f(x)-2024x \quad \text{για κάθε} \quad x,y\in\mathbb{R}$$

Αν $f(f(1))=1$, να βρείτε την τιμή του $f(2025)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο εξωτερικό ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ, με $Α\Delta=\Delta Β$ και $ΑΕ=ΕΓ$, τέτοια ώστε

$$Α\hat{\Delta}Β=2\cdot Α\hat{Γ}Β \quad \text{και} \quad Α\hat{Ε}Γ=2\cdot Α\hat{Β}Γ$$

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 1ο

Έστω $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ μία αριθμητική πρόοδος τέτοια ώστε

$$\alpha_{m+n} = 103 \quad \text{και} \quad \alpha_{m-n} = 49$$

για κάποιους θετικούς ακέραιους $m > n$.

Να βρεθεί η τιμής της διαφοράς $\alpha_{n\alpha_m} - \alpha_n$.

ΘΕΜΑ 2ο

Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι x, y για τους οποίους ισχύει:

$$11x^2y^2 - y^4 - 25x^4 + 7 = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B\Gamma = \lambda \cdot AB$, για κάποιο $\lambda > 1$, και σημεία Ε και Ζ στις πλευρές ΑΔ και ΓΔ, αντίστοιχα, τέτοια ώστε η ευθεία ΕΖ να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΓ και $B\hat{E}Z = 90^o$.

Να βρείτε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{(BEZ)}{(AB\Gamma\Delta)}$ συναρτήσει του λ.