

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** **α)** Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;
- β)** Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ δεδομένο διάνυσμα και $M'(x', y')$ η εικόνα του M στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα \vec{u} , να βρείτε τα x', y' συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου M και του διανύσματος \vec{u} .
- γ)** Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός;
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- B1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τον μετασχηματισμό της στήλης I και δίπλα στον αριθμό της στήλης II που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.

Στήλη I	Στήλη II
T_1 : «συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$ »	1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
T_2 : «στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ »	2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
	3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- B2.** Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό T με πίνακα $A = A_1A_2 - A_2A_1$, όπου A_1, A_2 οι πίνακες των μετασχηματισμών T_1, T_2 αντιστοίχως, του ερωτήματος **B1**.
- α)** Να δείξετε ότι ο T είναι κανονικός μετασχηματισμός.
- β)** Να βρείτε την εικόνα της ευθείας $\varepsilon: 2x - y + 5 = 0$ μέσω του μετασχηματισμού T .

ΘΕΜΑ 2ο

- A.** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{5+i}{2+3i}$.
- α)** Να γράψετε τον z στη μορφή $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- β)** Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.
- Στις ερωτήσεις **γ), δ)** να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
- γ)** Αν $\theta = \text{Arg}z$, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:
- A. $\frac{\pi}{4} - \theta$ B. $\frac{\pi}{2} + \theta$ Γ. $\theta - \frac{\pi}{2}$ Δ. $\pi + \theta$
- δ)** Το z^4 είναι ίσο με:
- A. 4 B. $4i$ Γ. $-4i$ Δ. -4

B. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

$$\left| \frac{z-1}{z-i} \right| = 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$.

- A.** Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.
- B.** Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.
- Γ.** Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος **B** να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$

- α)** Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.
- β)** Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;
- γ)** Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).