ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Α.2. Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα:

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{z_1}{z_2}$	1. $\rho_1\rho_2[\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)+i\text{συν}(\theta_1+\theta_2)]$
β. $z_1 \cdot z_2$	2. $\rho_1^\nu[\text{συν}(\nu\theta_1)+i\text{ημ}(\nu\theta_1)]$
γ. z_1^ν	3. $\frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)]$
	4. $\frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)]$
	5. $\rho_1\rho_2[\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)]$
	6. $\rho_1^\nu[\text{ημ}(\nu\theta_1)-i\text{συν}(\nu\theta_1)]$

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = 2\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{και} \quad z_2 = \text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{5\pi}{3}$$

Τότε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με:

Α. 2 Β. $2i$ Γ. -2 Δ. $-2i$ Ε. $2(1-i)$

Β.2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$.

Να υπολογίσετε το z^{16}.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Θεωρούμε τον πίνακα A διάστασης $(\kappa^2 - 2\kappa - 1) \times (k + 2\lambda - 3)$ και τον πίνακα B διάστασης $(\lambda + 1) \times (3\kappa - \kappa^2 + 2)$, όπου κ και λ θετικοί ακέραιοι.

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$.

β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων A και B, για να ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$.

Β. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A^2=-I$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

β. $2A^{2004}+A^{2001}+A^{1999}=2I$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-\alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=4$.

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1,0)$ να διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$.

γ. Αν $\alpha>2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών κάθε μέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος $K(x)$ σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x)=10\left(x+\frac{16}{x}+40\right)$$

όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του **β.** ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.