

ΘΕΜΑ 1ο

- A1.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
- A2.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- B1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .
- β.** Αν η f είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- γ.** Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .
- B2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτομένες
α. $f(x) = 3x^3, x_0 = 1$	1. $y = -2x + \pi$
β. $f(x) = \eta\mu 2x, x_0 = \frac{\pi}{2}$	2. $y = \frac{1}{4}x + 1$
γ. $f(x) = 3 x , x_0 = 0$	3. $y = 9x - 6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$	4. $y = -9x + 5$
	5. δεν υπάρχει

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{2z+i}{z-2i}$, $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq -2i$, όπου \bar{z} ο συζυγής του z .

- α.** Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1 = f(9-5i)$$

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004}$$

- β.** Θεωρούμε τον πίνακα $M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} |w_1| & 0 \\ 0 & -|w_1| \end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του

ερωτήματος **α**.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός T με πίνακα M είναι:

- A. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$.
- B. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$.
- Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$.
- Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y = x$.
- E. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων O και λόγο $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
- γ. Αν M ο πίνακας του ερωτήματος β , τότε να βρεθεί ο πίνακας X ώστε να ισχύει: $MX = K$, όπου K είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων O και γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

- α. η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

- γ. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

ΘΕΜΑ 4ο

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

- α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .
- β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.