

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

β. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;

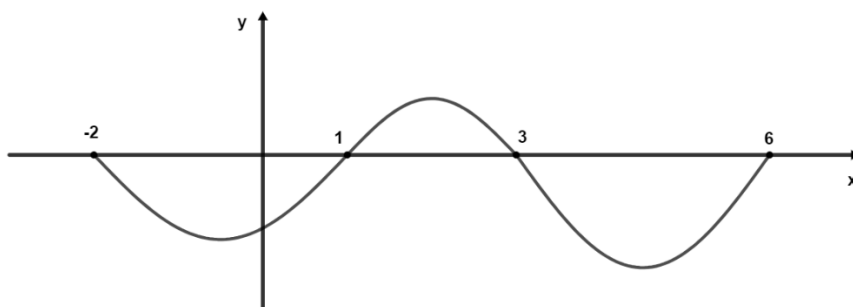
B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ. Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

B.2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 6]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^{20} - z_2^{20} = 0$.

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου n για τις οποίες ο z_1^n είναι πραγματικός αριθμός.

γ. Να βρείτε τον πίνακα της συμμετρίας με την οποία μπορεί να προκύψει από την εικόνα της ρίζας z_1 η εικόνα της ρίζας z_2 .

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$$

- α. Να βρείτε το $f(0)$.
- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
- γ. Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, g(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}.$$

- α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.
- β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.
- γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.
- δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή του εισαγωγής του στην αγορά.