ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i\bar{z}| = |z|$

Β.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α		**Στήλη Β**	
1.	$\lvert z_1 \cdot z_2\rvert$	**α.**	4
2.	$\lvert z_1^2\rvert$	**β.**	2
3.	$\lvert z_2\rvert^2$	**γ.**	25
4.	$-\lvert\bar{z}_1\rvert$	**δ.**	5
5.	$\lvert iz_2\rvert$	**ε.**	-2
		στ.	5
		ζ.	10

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 & , \ x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3} & , \ x > 3 \end{cases}$.

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) $f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)\,dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\etaμ2x\right)$.