ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Α.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \ldots\ldots\ldots$

β. $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = \ldots\ldots\ldots$

γ. $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \ldots\ldots\ldots$

όπου $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

Β.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=6x+4$, $x\in\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0,3)$ έχει κλίση 2.

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 (e^x+x)dx$

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx$

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x)dx$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z+16|=4|z+1|$.

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z-1|=|z-i|$.

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων **(α)** και **(β)**.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\alpha & , \quad x\le 1 \\ (1-e^{-x+1})\ln(x-1) & , \quad x\in(1,2] \end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$.

β. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

γ. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x}+\displaystyle\int_1^x\dfrac{tf(t)}{x^2}dt$ με $x>0$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$, $x>0$.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.