ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α)** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει:

$$x\left[f(x)-2x+2\right]=\etaμx\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι ώστε $w=\frac{z-3i}{1+i}$.

Α. **α)** Αν $w=2-2i$, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι:

Α. 3 Β. 4 Γ. 5 Δ. 2

Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

β) Αν $|w|=2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

Β. **α)** Αν $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=\frac{x+y-3}{2}$, $\mathrm{Im}(w)=\frac{-x+y-3}{2}$.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Arg}(w)=\frac{\pi}{4}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x-2x$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα της μονοτονίας της f.

β) Να αποδείξετε ότι $\ln x\geq 2-\frac{e}{x}$, για κάθε $x>0$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f'(x)+f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,

β) $\left[f(x)\cdot e^x\right]'=e^{2x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

γ) ο τύπος της f είναι $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Πανελλαδικές Εξετάσεις

Εκδόσεις Πατάκη