ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Β.1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

β. Κάθε συνάρτηση, που είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$.

ε. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και $f(\nu) = i^{\nu} z$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α. Να δείξετε ότι $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$.

β. Αν $|z| = \rho$ και $\operatorname{Arg}(z) = \theta$, να δείξετε ότι: $f(13) = \rho\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$.

γ. Αν $|z| = 2$ και $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών 0, z και $f(13)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι $1-1$.

α. Να δείξετε ότι η g είναι $1-1$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$g\left(f(x) + x^3 - x\right) = g\left(f(x) + 2x - 1\right)$$

έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε και $\int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$.

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1,\quad x\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad f(0)=0$$

i. Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

ii. Να δείξετε ότι $\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x)$, για κάθε $x>0$.

iii. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)$$