

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Αν $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)]$.
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Αν $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.
- β.** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- γ.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- δ.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.
- ε.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
- β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.
- γ.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , με τύπο

$$f(x) = \frac{|x - z|^2 - |x + \bar{z}|^2}{x^2 + |z|^2},$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$.

- α.** Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- β.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f , εάν $|z + 1| > |z - 1|$.
- γ.** Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f .

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 2f'(0) = 1$$

- α.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .
- β.** Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 1$ έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα $[0,1]$.