ΘΕΜΑ 1ο

A. **α)** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

B. **α)** Αν $z = x + yi \neq 0$, $|z| = \rho$ και θ ένα όρισμα του z, να αποδείξετε ότι ο z παίρνει τη μορφή

$$|z| = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$$

β) Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, είναι η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_1 = z_2$, τότε

1) $\rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 + \theta_2 = 0$.

2) $\rho_1 + \rho_2 = 0$ και $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $\rho_1 = \rho_2$ και $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4) $\rho_1 - \rho_2 = 0$ και $\theta_1 + \theta_2 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 - 2i$ και $z_2 = 3 + 4i$.

α) Αν $\dfrac{z_2}{z_1} = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $x = -1$ και $y = 2$.

β) Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \beta x + 2\gamma = 0$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, είναι η $\dfrac{z_2}{z_1}$, να βρείτε τις τιμές των β και γ.

γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει

$$|z - 2z_1| = |z_2|$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 4 + \dfrac{1}{2x+4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=0$ και

$$xf'(x)-2f(x)=x\,,\quad \text{για κάθε}\quad x\in(0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{(\ln x)^2}$.