**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο $x_0$, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Β.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν $z$ ένας μιγαδικός αριθμός και $\bar{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|=|\bar{z}|=|-z|$.

**β.** Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα $\Delta$, και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\Delta$. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του $\Delta$, τότε η $f$ είναι κυρτή στο $\Delta$.

**γ.** Για κάθε συνάρτηση $f$, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$, ισχύει $\int f'(x)dx=f(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

**δ.** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι κυρτή σε ένα διάστημα $\Delta$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ σε ένα σημείο του $\Delta$ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

**ε.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\Delta$ και $x_0$ ένα εσωτερικό σημείο του $\Delta$. Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και $f'(x_0)=0$, τότε η $f$ παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο $x_0$.

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $w=3z-i\bar{z}+4$, όπου $\bar{z}$ είναι ο συζυγής του $z$.

**α.** Να αποδείξετε ότι $\mathrm{Re}(w)=3\alpha-\beta+4$ και $\mathrm{Im}(w)=3\beta-\alpha$.

**β.** Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του $w$ στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία $y=x-12$, τότε οι εικόνες του $z$ κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$.

**γ.** Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς $z$, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση $y=x-2$, έχει το ελάχιστο μέτρο.

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

**α.** Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η $f$ έχει αντίστροφη συνάρτηση.

**β.** Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**γ.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της $f$ και της $f^{-1}$.

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f^{-1}$, τον άξονα των $x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $(\alpha,\beta)$. Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

**α.** Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(\alpha,\beta)$.

**β.** Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

**γ.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της $f$.