ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

γ. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1=x_2$, τότε $f(x_1)=f(x_2)$.

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$$

Γ. Πότε μια ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z|=2$ και $\operatorname{Im}(z)\ge 0$.

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \quad \text{και} \quad f'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45°.