

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} και μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με πεδίο ορισμού το A .
Πότε η f λέγεται συνάρτηση $1-1$;
- β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
- γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
 - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
 - $|z_1 \cdot z_2| > |z_1| \cdot |z_2|$
 - $|z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1$
- όπου $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x-3 & , x \leq -\frac{4}{3} \\ 2x+1 & , x > -\frac{4}{3} \end{cases}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = -\frac{4}{3}$.
- β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{4}{3}$.
- γ) Για $x_0 \neq -\frac{4}{3}$, να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(z) = \frac{z+i}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

- α) Αν $|f(z)| = |f(\bar{z})|$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.
- β) Αν $|f(z)| = 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.
- γ) Αν $\operatorname{Re}(f(z)) = 2$, να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z βρίσκονται σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιος ώστε $f(x) = x \cdot f'(\xi)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$, $x > 0$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- γ) Αν $h(x) = e^x + x^5 + x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e-1} f(x+1) dx$.