

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος δύο μιγαδικών αριθμών είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.
- β.** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$.
- γ.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g'(x_0)$.
- δ.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- ε.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
- β.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμψής.
- γ.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.
- β.** Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- γ.** Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$g(x) = \int_1^{x^3} |z|f(t)dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0$$

όπου $z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, τότε:

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να βρείτε τη g' .
- β.** Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$.
- γ.** Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος **β** να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.
- δ.** Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.