

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

B. Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και $x_0 \in A$.

Πότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ**, **Δ**, **Ε**, **ΣΤ** και **Ζ** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.

Γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους στο μιγαδικό επίπεδο.

Δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Ε. Ισχύει ο τύπος $\int \eta \mu x dx = \sigma \nu x + c$.

ΣΤ. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι: Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

Ζ. Έστω μια $1-1$ συνάρτηση f και C, C' οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων. Τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \quad x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Αν, για τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ισχύει $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, τότε:

i) να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

ii) να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω z μιγαδικός αριθμός, με $z \neq \pm i$ και $w = \frac{z}{z^2 + 1}$.

- α) Να αποδείξετε ότι αν ο w είναι πραγματικός, τότε ο z είναι πραγματικός ή $|z|=1$.
- β) Να λύσετε, στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, την εξίσωση $\frac{z}{z^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- γ) Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{(z_1 \cdot z_2)^3 - i}{4 + (z_1 + z_2)^2}$$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt, \quad x \in \Delta$$

- α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.
- β) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 3x - 1$.
- γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.