

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας, τουλάχιστον  $x_0 \in (α,β)$  τέτοιος, ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**A.2** Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$  με  $f(α) < 0$  και υπάρχει  $\xi \in (α,β)$  ώστε  $f(\xi) = 0$ , τότε κατ' ανάγκη  $f(β) > 0$ .

**β)** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ , τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**γ)** Αν η  $f$  έχει αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  και η γραφική παράσταση της  $f$  έχει κοινό σημείο  $A$  με την ευθεία  $y = x$ , τότε το σημείο  $A$  ανήκει και στη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

**ε)** Αν η  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $a$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x) - f(a)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**στ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε  $x \in \Delta$  ή είναι αρνητική για κάθε  $x \in \Delta$ , δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα  $\Delta$ .

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ .

**α.** Δείξτε ότι:  $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$ .

**β.** Δείξτε ότι ο αριθμός  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}$  είναι πραγματικός.

**γ.** Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$ .

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = e^{\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

- α. Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
- β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η  $y = \lambda e^x$ .  
Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής  $M$ .
- γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν  $E(\lambda)$  του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της  $f$ , της εφαπτομένης της στο σημείο  $M$  και του άξονα  $y'y$ , είναι  $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ .
- δ. Υπολογίστε το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$ .

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση  $2f'(x) = e^{x-f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ .

- α. Ναδειχθεί ότι:  $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$ .
- β. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta\mu x}$ .
- γ. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt$  και  $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$ .  
Δείξτε ότι  $h(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- δ. Δείξτε ότι η εξίσωση  $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008}$  έχει ακριβώς μία λύση στο  $(0,1)$ .