ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

β) Έστω $M(x,y)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του z;

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ),** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή **(Λ),** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z μιγαδικός αριθμός και $\overline{z}$ ο συζυγής του, τότε ισχύει $|z|^2=z\overline{z}$.

2. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0, τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right|$.

3. Ισχύει $(\eta\mu x)'=-\sigma\upsilon\nu x$.

4. Ισχύει $\int e^x\,dx=e^{2x}+c$, $c\in\mathbb{R}$.

5. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=3+i$ και $z_2=1-3i$.

α) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{z_1}{z_2}=i$ και $|iz_1+z_2|^2=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $z_1^{2006}+z_2^{2006}=0$.

γ) Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό $w=\dfrac{kz_1-iz_2}{z_2-kz_2}$, $k\in\mathbb{R}-\{1\}$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $k\in\mathbb{R}-\{1\}$ ισχύει $\operatorname{Im}(w)=-1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha+e^x & , \quad x\le 0\\ x\ln x & , \quad x>0\end{cases}$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Α) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Β) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha=-1$:

i) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x-\ln x+e^{x}$, $x\in(1,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

β) Να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1,+\infty)$.

δ) Έστω $\Pi=\int_{2}^{e}f(x)dx+\int_{f(2)}^{f(e)}f^{-1}(x)dx$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi-2\ln 2$.