

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1** Να αποδείξετε ότι:  $(\sin x)' = -\eta\mu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**A.2** Έστω  $f$  μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ ;

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:  $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\|$ .

**β)** Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$  και  $g(x_0) \neq 0$ , τότε η συνάρτηση  $\frac{f}{g}$  είναι

παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$ .

**γ)** Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $[\ln|x|]' = \frac{1}{x}$ .

**δ)** Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .

**ε)** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $G$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $[\alpha, \beta]$ ,

τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$ .

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία της στο  $\mathbb{R}$ .

**β.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{1}{f(x)} dx$ .

**γ.** Για κάθε  $x < 0$  να αποδείξετε ότι:  $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$ .

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$ , που ικανοποιούν την ισότητα  $(4-z)^{10} = z^{10}$  και η συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f(x) = x^2 + x + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

**α.** Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z$  ανήκουν στην ευθεία  $x = 2$ .

**β.** Αν η εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο τομής της με την ευθεία  $x = 2$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $y_0 = -3$ , τότε

- i. να βρείτε το  $a$  και την εξίσωση της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ).
- ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ , της εφαπτομένης ( $\varepsilon$ ), του άξονα  $x'x$  και της ευθείας  $x = \frac{3}{5}$ .

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$  με  $x > 0$ .

- α. i. Να αποδείξετε ότι:  $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .
- ii. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .
- β. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .
- γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός  $a \in (0, +\infty)$  τέτοιος ώστε  $(a+1)^a = a^{a+1}$ .