

ΘΕΜΑ 1ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

β) Έστω μία συνάρτηση f και το σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

γ) Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη (**Σ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\|z_1 - z_2\| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και

$$\text{ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

4. $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$.

5. Αν για μία συνάρτηση f , συνεχή στο διάστημα $[a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx \geq 0.$$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω ότι για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $(5z - 1)^5 = (z - 5)^5$.

α) Να δείξετε ότι $|5z - 1| = |z - 5|$.

β) Να δείξετε ότι $|z| = 1$.

γ) Αν $w = 5z + 1$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(w)$ στο μιγαδικό επίπεδο.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 5) + 2x - 12$.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f(x) = 3 + 2 \int_0^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$ είναι σταθερή.
- β) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = 3e^{2x}$.
- γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $E(\lambda)$ που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=\lambda$ με $\lambda > 0$.
- δ) Να βρεθεί το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{E(\lambda)}{\lambda}$.