ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Α.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Α.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx > 0$.

β) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ε) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο $z = \dfrac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i}$ για $\alpha = 0$ και $\alpha = 2$ αντίστοιχα.

i. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.

ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^{2\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)\,dt, \quad x\in[0,1],$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt, \quad x\in[0,1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x)\cdot G(x)>F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

δ. Να βρεθεί το όριο $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)\,dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5}$.