ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

β) Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g'(x)dx$$

γ) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x) \quad \text{για κάθε } x\in\Delta$$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$.

ε) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x<0\\ x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x\ge 0\end{cases}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=3$.

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha=\beta=3$.

γ. Αν $\alpha=\beta=3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e\ln x$, $x>0$.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x)\ge e$ για κάθε $x>0$.

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$.

Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι:

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\overline{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0$$