ΘΕΜΑ 1ο

Α. **1.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διαστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ),** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή **(Λ),** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε μιγαδικό αριθμό z και κάθε θετικό ακέραιο ν, ισχύει $|z|^{\nu}=|z^{\nu}|$.

2. Ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ’ ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)=0$, τότε και η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left[g(x_0)\right]^2}$.

5. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα Δ, ισχύει: $\int f'(x)dx=-f(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1=i$, $z_2=1$, και $z_3=1+i$.

α. Να αποδείξετε ότι: $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_3|^2$.

β. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z-z_1|=|z-z_2|$, τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$.

ii. για $z\neq 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{z}{\bar z}+\dfrac{\bar z}{z}$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{4x}$, $x\in(0,+\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\dfrac{1}{e^5}\right)>0$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$ και $f\left(e^5\right)>0$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1,f(1))$.

γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x)-f(x)=-4e^{-3x}$ και $f(0)=2$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{-x}f(x)-e^{-4x}$ είναι σταθερή.

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^{x}+\dfrac{1}{e^{3x}}$.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(x)=\int_0^x f(t)dt$.

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{I(x)}{x^2}$.